EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

EXAMENNUMMER 2018

Besprekingen van de examens wiskunde vmbo (kb en gt), havo (A en B) en vwo (A, B en C)

50 jaar Cito: de beginjaren van het instituut

Wiskunde en het vak natuur leven en technologie

Jaarvergadering en studiedag NVvW 2018

JAARGANG 94 - SEPTEMBER 2018

NR.1



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

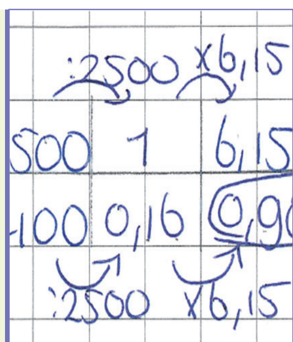
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 94 NR.1



IN DIT NUMMER

EXAMEN VMBO-KB (SCHRIFTELIJK)
Ruud Jongeling
4



EXAMEN VMBO-GT
Hugo Duivesteijn
9

GRENSGEVAL
Jan Beuving
13

EXAMEN HAVO WISKUNDE A
Henk Hietbrink
14

WIS EN WAARACHTIG
18

EXAMEN HAVO WISKUNDE B
Femke van den Berg-Douma
20

EXAMEN VWO WISKUNDE A
Marcel Daems
24

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS
Ger Limpens
28

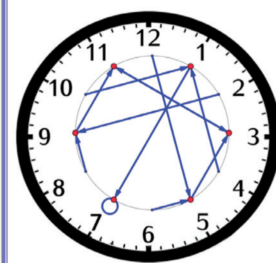


UIT DE PRAKTIJK
Hugo Duivesteijn
31

EXAMEN VWO WISKUNDE B
Gerardo Soto y Koelemeijer
32

EXAMEN VWO WISKUNDE C
Marjan Botke
36

MEETKUNDIGE KIJK OP MODULOREKENEN
IMPRESSIE VAN DE WISKUNDE B-DAG-OPDRACHT 2017
Rogier Bos
39



WISKUNDE EN NLT
Nelleke den Braber
43

SCHERP, RECHT, STOMP…
Dick Klingens
45

Het Cito gebouw, Amsterdamseweg, Arnhem
(Le Maire, 2010. ontwerp: de Architecten Cie. , Amsterdam)

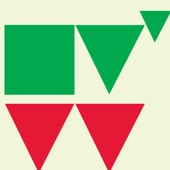
Foto: Peter Huizer (Cito).

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

PUZZEL
Birgit van Dalen
Quintijn Puite 47

VERENIGINGSNIEUWS
JAARVERGADERING / STUDIEDAG 2018 48

SERVICEPAGINA 50



Kort vooraf

Jaargang 94 opent, zoals gebruikelijk, met het examennummer. Van elk examen uit het eerste tijdvak is er een persoonlijke recensie, waar we de auteurs uitermate dankbaar voor zijn. Met enig bazuingeschal: Jan Beuving, je kent hem vast wel van zijn theatershows en zijn rubrieken in diverse media, gaat deze jaargang een column schrijven: De Hoekstreep. Hugo Duivesteijn schreef de eerste aflevering van Uit de Praktijk, korte belevenissen in de klas, iedere docent heeft ze en we nodigen iedereen uit ze op te schrijven!
Omstreeks het verschijnen van deze *Euclides* gaat de vlag uit bij het Cito om het vijftigjarig bestaan te vieren. Het leek ons een goede gelegenheid om het Cito te vragen om deze jaargang een reeks bijdragen te leveren. Niet alleen over de geschiedenis van het instituut en de totstandkoming van de examens, maar ook over minder bekende activiteiten.
Deze jaargang is er nog veel meer reden tot feest, tal van wiskunde gerelateerde evenementen hebben een speciaal jubileum of een lustrum te vieren. Zo was er al de vijfde SMART-finale van de vijfentwintigste W4Kangoeroe, zie de rubriek Wis en Waarachtig, en de tiende editie van de Benelux Wiskunde Olympiade. De wiskunde B-dag wordt in november voor de twintigste keer georganiseerd (zie het artikel van Rogier Bos in deze editie), de Alympiade voor de dertigste keer. Aan het eind van het jaar is er de twintigste Top2000, ook veel getallen... , en vlak daarna de vijfentwintigste Nationale Wiskunde Dagen. In september is de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en uit de winnaars wordt het team geselecteerd voor de zestigste Internationale Wiskunde Olympiade. En alsof al die vijfvouden nog niet genoeg zijn, als klap op de vuurpijl: deze jaargang verschijnt de 750e *Euclides*. Tel maar na op het digitale archief...

Tom Goris

EXAMEN VMBO-KB (SCHRIFTELIJK)

Ruud Jongeling

Ruud Jongeling bespreekt het schriftelijke wiskunde-examen uit het eerste tijdvak van 2018 voor de kaderberoepsgerichte leerweg. Van het examen beschrijft hij een aantal algemene kenmerken, de contextopgaven en een aantal oplossingen van leerlingen.

Algemeen

Dit jaar had ik de taak het wiskunde-examen voor de kaderleerlingen te starten en af te sluiten. Voor de zekerheid had ik een aantal reserve geodriehoeken meegenomen, want je weet maar nooit of er bij een kandidaat nog een Hema geodriehoek was achtergebleven. Dat bleek niet het geval, maar de geodriehoeken vonden toch gretig aftrek. Blijkbaar geeft een nieuwe geodriehoek meer zelfvertrouwen. Ik keek de zaal in en zag ruim honderd leerlingen, wachtend op mijn sein het opgavenboekje te openen. Onwillekeurig moest ik denken aan de schooldirecteur die kort daarvoor op televisie had verteld het niet meer van deze tijd te vinden dat alle leerlingen tegelijkertijd door hetzelfde hoepeltje moesten springen. Door zijn woordkeus diskwalificeerde hij de prestaties van zijn leerlingen en zijn docenten. Jammer, want over examens mag best inhoudelijk gediscussieerd worden.
De leerlingen mochten starten en binnen een paar tellen was iedereen verdiept in de opgaven. Ik nam het opgavenboekje en keek het snel door. Hoe zou het hoepeltje voor onze leerlingen er dit jaar uitzien? De eerste indruk was niet verkeerd, alles wat gevraagd werd was in het afgelopen schooljaar aan bod geweest. Wel viel mij tegen het einde van het examen op dat mijn leerlingen het langst bleven zitten. Deze leerlingen hadden hun tijd echt nodig. Na afloop vertelden ze me dat ze vonden dat er veel tekst in het examen zat en dat ze de vragen niet altijd goed begrepen.

De leerlingen maakten een examen dat bestond uit 26 vragen waarvoor ze maximaal 74 punten konden halen. De 26 vragen waren verdeeld over zeven contexten. De kleinste context *Bijzettafels* had twee vragen en leverde 6 punten op. De context *Glas-in-lood-raam* telde vier vragen en leverde 15 punten op.

Tabel 1 laat de puntenverdeling per context zien.

context	puntentotaal	% eindscore
Broodbakken	11	15%
Scholeksters	11	15%
Sierbestrating	8	11%
Zonnebloempitten	13	18%
Glas-in-lood-raam	15	20%
Kruisjes en cirkels	10	14%
Bijzettafel	6	8%
Totaal	**74**	**100%**

tabel 2 Punten per context

De examenstof van het centraal examen KB betreft de domeinen algebraïsche vaardigheden, meetkunde en rekenen, meten en schatten.
Tabel 2 laat de puntenverdeling per domein zien.

domein	puntentotaal	% eindscore
Algebraïsche vaardigheden	24	32%
Rekenen, meten en schatten	21	28%
Meetkunde	29	39%
Totaal	74	100%

tabel 2 Punten per domein

	percentage van de eindscore		
	2017 1e tijdvak	2017 2e tijdvak	2018 1e tijdvak
1 & 2 puntsvragen	26%	14%	23%
4 & 5 puntsvragen	34%	58%	36%

tabel 3 Percentage van de eindscore per 1 & 2 en 4 & 5 puntvragen

In het examen komen de drie domeinen min of meer in gelijke mate aan bod waarbij het domein rekenen, meten en schatten iets achterblijft ten opzichte van de beide andere domeinen.

De moeilijkheid van een examen kun je afleiden uit de N-term. Een andere manier om de complexiteit van het examen in beeld te krijgen is het aantal 1 en 2 puntvragen en het aantal 4 en 5 puntvragen te bekijken. De eerste categorie betreft meestal eenvoudige opgaven, bij de tweede categorie gaat het vaak om complexe opgaven met meer denkstappen. In tabel 3 worden de percentages van de eindscore van deze vragen van de afgelopen drie schriftelijke KB-examens in beeld gebracht.

In mijn bespreking van de schriftelijke KB-examens van vorig jaar had ik aangegeven de indruk te hebben dat het examen uit het tweede tijdvak moeilijker was dan het examen uit het eerste tijdvak. De tabel laat zien dat deze indruk terecht was. Vergelijken we de verdeling van de percentages van het examen uit het eerste tijdvak van 2018 met het examen uit de eerste tijdvak van 2017 dan zien we dat de percentages vrijwel overeenkomen.

Het examen zelf: brood bakken

De eerste context, *Brood bakken*, betrof voornamelijk rekenwerk. Om een rozijnenbrood te bakken heeft Mannes 400 gram rozijnenbroodmix nodig. In vier opgaven moesten de leerlingen uitrekenen wat 400 gram rozijnenbroodmix kost, zie figuur 1, hoeveel dl water hij moest toevoegen, hoeveel rozijnen hij moest toevoegen en hoe laat hij het mengsel in de broodbakmachine moest doen. De meeste leerlingen hadden weinig moeite met deze berekeningen.

Brood bakken

Windkorenmolen "DE HOOP"
ROZIJNEN-BROODMIX
2,5 kg
€ 6,15

Om een rozijnenbrood te bakken, heeft Mannes 400 gram rozijnen-broodmix nodig.

3p 1 Voor 2,5 kg rozijnen-broodmix betaalt Mannes € 6,15.
→ Hoeveel kost 400 gram rozijnen-broodmix? Schrijf je berekening op.

figuur 1 Brood bakken

Opvallend was de oplossingswijze van Halime. Veel van mijn leerlingen gebruikten een verhoudingstabel met gewicht in de ene rij en percentage in de andere rij. Ze rekenden van 2500 gram via 1 gram naar 400 gram. Halime gebruikte de verhoudingstabel om de verhouding tussen gewichten (2500 gram en 400 gram) via 1 om te rekenen naar verhoudingen in het bedrag, zie figuur 2.

2500	1	6,15
400	0,16	0,984

:2500 ×6,15

figuur 2 De verhoudingstabel van Halime

Scholeksters

De tweede context betrof de afname van het aantal scholeksters in Nederland. De context was een combinatie van rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden. De eerste vraag is een goed voorbeeld van een vraag die de leerlingen niet goed hadden begrepen. In 1996 waren er 180 000 scholeksters. Vóór 1996 nam het aantal scholeksters elk jaar met 17 500 af. De leerlingen moesten berekenen hoeveel scholeksters er in 1990 waren. Maar liefst 13 van de 20 leerlingen hadden niet door dat ze het aantal van 6 × 17 500 moesten optellen in plaats van afhalen. Jente zag het nog net op tijd, zie figuur 3.

· 1996 waren er 180 000 scholeksters.
· 180 000 + 105000 = 285000 scholeksters

figuur 3 Jente zag het op tijd

De andere vragen van de context leverde over het algemeen weinig problemen op met uitzondering van opgave 7 waarbij de leerlingen aan de hand van een grafiek de formule voor een lineair verband moesten opstellen. Veel leerlingen zagen over het hoofd dat gevraagd werd naar een formule met het aantal scholeksters in duizendtallen.

Sierbestrating

De context *Sierbestrating* betrof een echte meetkundecontext. Stratenmaker Jack wil een cirkelvorm leggen met straatstenen, zie figuur 4.

Sierbestrating

C, D, B, M, A

Stratenmaker Jack wil een cirkelvorm leggen van straatstenen zoals op de foto links. Hij wil alleen geen acht stenen om de kleine cirkel heen leggen, maar tien stenen.
Jack gaat uit van twee cirkels met hetzelfde middelpunt *M*. De grote cirkel heeft een straal van 30 cm, de kleine cirkel heeft een straal van 10 cm. Zie de schets hierboven.

figuur 4 Wiskundig model van de sierbestrating van Jack

Mijn leerlingen Zorg en welzijn vonden dit geen eenvoudige context en lieten nogal wat punten liggen. Ze moesten laten zien dat in driehoek *MBC* hoek *M* 36° is, daarna berekenen hoeveel graden hoek *C* in driehoek *MBC* is en berekenen hoeveel cm *BC* is. Wat mij betreft vragen op kaderniveau waar ik eigenlijk bij mijn leerlingen wat meer van had verwacht.

Zonnebloempitten

Toen de leerlingen na afloop van het examen het hadden over 'veel tekst' bedoelden ze mogelijk de context *Zonnebloempitten*. De context ging over de hoogte van zonnebloemen en bevatte een exponentieel verband en een wortelverband. De leerlingen moesten onder meer op de uitwerkbijlage een grafiek van het exponentiële verband tekenen en daarbij zelf een goede verdeling langs de verticale as maken.

Deze opgave werd over het algemeen goed gemaakt. In opgave 14 moesten de leerlingen nagaan hoeveel dagen na het zaaien de zonnebloem zijn maximum hoogte van 250 cm had bereikt.

Ze moesten daarbij het volgende wortelverband gebruiken: $h = 170 + 10 \times \sqrt{(t-50)}$. De leerlingen konden voor deze vraag 3 punten krijgen, zie figuur 5.

14 maximumscore 3

- Met gericht proberen: $170 + 10 \times \sqrt{(114-50)} = 250$ — 2
- Het antwoord: 114 (dagen) — 1

figuur 5 Het correctiemodel bij vraag 14

Gericht proberen betekent in dit geval de formule in de rekenmachine plaatsen, een tabel maken en scrollen naar het juiste antwoord. Ik heb een voorkeur bij dit soort vragen voor inklemmen naar een tussenliggende waarde, bijvoorbeeld een lengte van minimaal 247 cm. Weliswaar maakt de leerling dan ook een tabel op de rekenmachine maar wordt tevens gedwongen na te denken welke van de twee antwoorden binnen de context het juiste is.
Bij vraag 16 werd gevraagd uit te rekenen hoeveel miljard kg zonnepitten er nodig zijn voor 7 miljard mensen die gemiddeld 17,5 liter zonnebloemolie per persoon gebruiken. Voor één liter zonnebloemolie is 1,5 kg zonnebloempitten nodig. Het antwoord van Büsra, zie figuur 6, laat zien dat ondanks alle aandacht die je als docent aan de grote getallen besteedt, het voor de kaderleerlingen toch lastige materie blijft. Veel leerlingen vinden het moeilijk om met de eenheid miljard of miljoen te werken.

1,5 x 17,5 = 26,25 kg

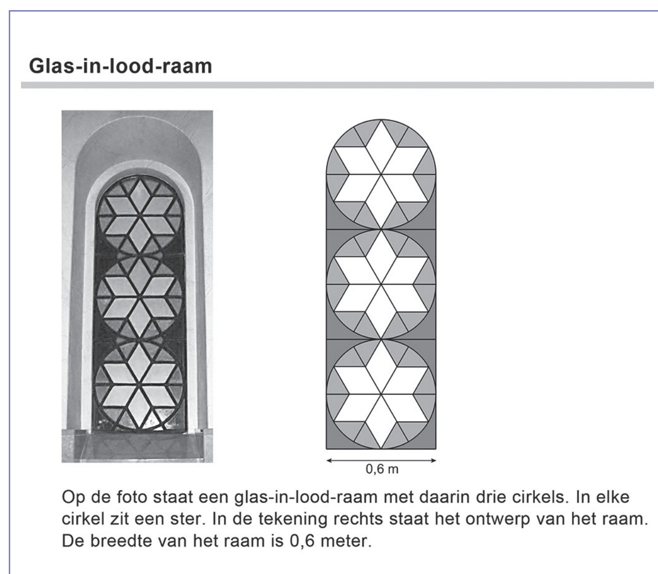
26,25 x 70000000 = 1837500000

figuur 6 Het antwoord van Büsra

'VEEL LEERLINGEN VINDEN HET MOEILIJK OM MET DE EENHEID MILJARD OF MILJOEN TE WERKEN.'

Glas in lood

In de context *Glas-in-lood-raam* moesten de leerlingen de oppervlakte van een glas-in-lood-raam uitrekenen dat bestaat uit een rechthoek en een halve cirkel, zie figuur 7. In het glas-in-lood-raam zit een ster verwerkt die bestaat uit zes ruiten. Vraag 19, waar met de tangens de lengte van een lijnstuk in een ruit moest worden uitgerekend, leverde weinig problemen op. Bij vraag 20 moest de oppervlakte van de ster in het glas-in-lood-raam worden uitgerekend.


Glas-in-lood-raam

0,6 m

Op de foto staat een glas-in-lood-raam met daarin drie cirkels. In elke cirkel zit een ster. In de tekening rechts staat het ontwerp van het raam. De breedte van het raam is 0,6 meter.

figuur 7 Glas-in-lood-raam

Lang niet alle leerlingen hadden door dat de ster uit zes ruiten bestaat. Dat kostte ze twee punten, want als een leerling het tweede bolletje van het antwoordmodel niet wist, dan schoot het derde bolletje er ook bij in, zie figuur 8.

20 maximumscore 3

- De oppervlakte van een ruit is 17,3... × 30 : 2 = 259,8... (cm^2) 1
- Een ster bestaat uit 6 ruiten 1
- 6 × 259,8... = 1559 (cm^2) (of nauwkeuriger) 1

of

- De oppervlakte van een ruit is 19 × 30 : 2 = 285 (cm^2) 1
- Een ster bestaat uit 6 ruiten 1
- 6 × 285 = 1710 (cm^2) 1

Opmerking
Er mag worden doorgerekend met een afgerond antwoord uit vraag 19.

figuur 8 Het correctiemodel bij vraag 20

Kruisjes en cirkels

De context *Kruisjes en cirkels* is een soort context die we wel vaker tegenkomen in de KB-examens. De eerste drie vragen hadden betrekking op de regelmaat van kruisjes en bolletjes in vierkanten en leverde weinig problemen op. Het antwoord op vraag 22, hoeveel kruisjes heeft figuurnummer 8, vond Amani door het antwoord op vraag 21, teken de figuur met $n = 5$, uit te breiden tot $n = 8$, zie figuur 9.

De laatste vraag van deze context had betrekking op een verband tussen het *aantal kruisjes* op een kubus en het figuur nummer *n*. De formule die bij dit verband hoort was gegeven. Het antwoordmodel gaf aan dat de leerling met gericht proberen op $n = 17$ moest komen. Het was de tweede opgave in dit examen die door gericht proberen

1	2	3	4	5	6	7	8
O	X	X	X	X	X	X	X
X	O	X	X	X	X	X	X
X	X	O	X	X	X	X	X
X	X	X	O	X	X	X	X
X	X	X	X	O	X	X	X
X	X	X	X	X	O	X	X
X	X	X	X	X	X	O	X
X	X	X	X	X	X	X	O

figuur 9 De oplossing van Amani

kon worden opgelost en ook bij deze opgave leverde dat de leerling 3 punten op.

Bijzettafel

De laatste context van het examen, *Bijzettafel*, bestond uit twee opgaven. In opgave 25 moesten de leerlingen een bovenaanzicht tekenen van de bijzettafel op schaal 1:10.


Bijzettafel

Op de foto zie je een bijzettafel waarvan het tafelblad de vorm heeft van een rechthoekige gelijkbenige driehoek. De schuine zijde is 50 cm.

50 cm

3p 25 Teken het bovenaanzicht van de bijzettafel op schaal 1 : 10.

figuur 10 De bijzettafel

Misschien kwam het door de afbeelding van de rechthoekige gelijkbenige driehoekige bijzettafel, zie figuur 10, maar mij viel op dat vrijwel alle leerlingen een gelijkzijdige driehoek met zijde 5 cm tekenden. Bij de laatste opgave moesten de leerlingen de oppervlakte van een parallellogram uitrekenen. Ze moesten de oppervlakte van de driehoekige tafel uitrekenen en deze twee keer van een gegeven oppervlakte afhalen. Dat ging de meeste leerlingen goed af.

Tot besluit

Percentageberekeningen kwamen in dit examen twee keer aan bod (vragen 3 en 8), goniometrie ook twee keer in de vorm van sinus en tangens (vragen 11 en 19) en in het examen zaten oppervlakteberekeningen in de vorm van rechthoek, halve cirkel en ruit (opgaven 17, 20 en 26). Het examen is door mijn leerlingen redelijk tot goed gemaakt. De N-term van 1,0 wijst erop dat het hier geen moeilijk examen betrof. In het examen zaten naar mijn mening weinig verrassingen.

Ten slotte de opmerking van de leerlingen over de hoeveelheid tekst in het examen. Ik heb Word het aantal woorden in de examens uit het eerste tijdvak van 2016, 2017 en 2018 laten tellen. Daarnaast heb ik de *Accessibility Leesniveau Tool* [1] het geschatte niveau van deze examens laten bepalen. Het betreft een indicatie van de technische leesbaarheid van de tekst uitgedrukt in de niveaus van het Europees Referentiekader voor de Talen. Tabel 4 geeft een overzicht van de drie wiskunde-examens uit het eerste tijdvak van de laatste drie jaar. Het gaat hier uiteraard om een indicatie en niet om een verantwoord onderzoek.
Het aantal woorden was minder dan in de afgelopen twee jaar en het niveau was met B2 vergelijkbaar met het examen uit 2016. Het lijkt er op dat dit examen niet taliger was dan de voorgaande examens.

jaar	aantal woorden	A.L.T. niveau
2018	1175	B2
2017	1208	B1 / B2
2016	1334	B2

tabel 4 Aantal woorden en Accessibility Leesniveau Tool (A.L.T) niveau

Link:

[1] *https://www.accessibility.nl/kennisbank/tools/leesniveautool*

Over de auteur

Ruud Jongeling is wiskundeleraar op het Da Vinci College in Roosendaal, een school voor de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo en het praktijkonderwijs.
Ook is hij voorzitter van de werkgroep vmbo van de NVvW. E-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*

EXAMEN VMBO-GT

Hugo Duivesteijn

Het vmbo-examen stond al snel bekend als 'het examen van de frietzakstandaard', door alle commotie over die opgave. De afhandeling van de commotie toonde aan dat het samenspel tussen alle betrokkenen bij onze examens werkt. Hugo Duivesteijn concludeert dat het uiteindelijk een prima examen was. De N-term was 1,0.

Inleiding

Te talig of niet, ieder jaar weer opnieuw dezelfde discussie. Ook dit jaar is er weer veel om te doen. Als ik collega's vertel dat ik met deze recensie bezig ben, krijg ik gelijk te horen: 'Dat is het examen met de frietzakstandaard.' Een vraag die voor alle kandidaten is goed gerekend. Slaan de makers door met hun poging om de tekst tot een minimum te beperken? Ik neem de vragen met je door.

Druivenoogst

Druivenoogst

Druiven hebben vaak last van schimmels. Om de schimmels te bestrijden, moeten de planten regelmatig met een biologisch bestrijdingsmiddel behandeld worden.



1 Wijnboer Frans krijgt korting. Hij betaalt voor het biologisch bestrijdingsmiddel € 68,- in plaats van € 80,- per liter.
→ Hoeveel procent korting krijgt Frans? Schrijf je berekening op.

figuur 1

De eerste vier vragen vallen onder de noemer *Druivenoogst*. Afgezien van een wijnboer die Frans heet, niet alle wijn komt uit Frankrijk hoor, is er weinig op deze vraag aan te merken, zie figuur 1. Het is een fijne binnenkomer voor de kandidaten. De eerste vraag is klip-en-klaar: 'Hoeveel procent korting krijgt Frans? Schrijf je berekening op.' Geen leerling die dat nalaat. Vervolgens wordt er gevraagd een grafiek te tekenen in een assenstelsel op de bijlage waar de assen al zijn ingevuld en er zelfs al een andere grafiek is getekend. Een goede vraag en fijn om mee te beginnen.

Mona Lisa

De vrouw die je altijd aan blijft kijken. Dat kan niet gezegd worden van deze vraag. Het begint met het omrekenen van dollars naar euro's. Vraag 6 en 7 gaan over rekenen met gemiddelde bezoekersaantallen en hebben ook veel van elkaar weg. Bij vraag 8 wordt er gevraagd of de poster van Iris met afmetingen 100 cm bij 80 cm een vergroting is van de echte Mona Lisa met afmetingen 77 cm bij 53 cm. Groter is hij sowieso, maar gelijkvormig niet. Een definitievraag dus eigenlijk. Goed dat dit ook getest wordt op deze manier.

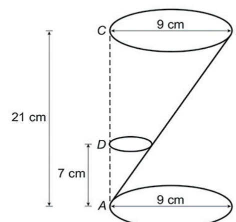
Frietzakstandaard

Toen ik deze vraag onder ogen kreeg moest ik lachen. Zouden de makers dezelfde snackbar hebben als ik? Nee ik ben niet de eigenaar van een snackbar, ik kom er graag. Mijn snackbar maakt gebruik van deze frietzakstandaard. Ik heb er zelf ook wel eens een foto van gemaakt omdat er zoveel wiskunde in verstopt zit. Deze vraag sloot dus meteen aan bij de belevingswereld van deze wiskundedocent, zie figuur 2.

Frietzakstandaard

Je ziet een foto en een schets van een standaard voor een frietzak.





De standaard bestaat uit drie cirkelvormige, evenwijdige ringen. De twee grote ringen hebben een diameter van 9 cm en zijn met elkaar verbonden door een schuine staaf *AB*. De punten *A*, *D* en *C* liggen op één lijn. De hoogte van de standaard is 21 cm.

9 Een fabrikant maakt de twee grote ringen en de staaf uit één stuk draad.
→ Bereken, zonder te meten, hoeveel cm de totale lengte van dat stuk draad is. Schrijf je berekening op.

figuur 2

Maar als we dan beginnen met het lezen van vraag 9 komt er al enige vertwijfeling. Bereken, zonder te meten, hoeveel cm de totale lengte van de metaaldraad is die de twee grote cirkels en de staaf maken. Het idee van de makers is vrij duidelijk. Omtrek cirkel uitrekenen en met behulp van pythagoras lijnstuk *AB* uitrekenen. Maar als we daar eenmaal mee bezig zijn, komt de vraag naar boven of dit wel zomaar kan. Staan die twee cirkels wel precies boven elkaar, of is hier sprake van een schuine cilinder. Als je naar de schets kijkt zou je nog denken dat er niks aan de hand is, het kan een scheve cilinder zijn, maar daar lijkt het niet op. De foto ernaast laat de twijfel toenemen, want daarop lijkt het er sterk op dat de twee grote cirkels niet precies boven elkaar zitten. Als dit zo is, valt *AB* niet te berekenen.
In de eerste aanvulling op het correctievoorschrift schrijft de CvTE nog dat het de verwachting is dat de kandidaten de context hebben opgevat zoals deze bedoeld is. Echter, er volgt nog een tweede aanvulling, alleen voor deze opgaves. Hierin staat, wat vraag 9 betreft, dat de maximumscore moet worden toegekend als er opgeschreven is dat *AB* niet te berekenen is en dat er nul punten worden toegekend als er niks wordt ingevuld. Dat vind ik begrijpelijk, maar lastig. Kandidaten die er niet uitkomen vullen niks in, dat kan in dit geval ook aan de fout van de vraag liggen. Vraag 10 houdt gelukkig stand, ook met een scheve cilinder. Hier word je gevraagd om de diameter van de kleine ring te berekenen. Een schitterend voorbeeld van het nut van een verhoudingstabel.
Het alternatief is namelijk goniometrie, wat de meeste kandidaten toch het liefst ontwijken.
Voor de volgende vraag moet je een bovenaanzicht tekenen op ware grootte. Hierbij komt de scheve cilinder meteen weer de hoek om kijken. Als de kandidaat het gevraagde beschouwt als een scheve cilinder is deze vraag onmogelijk te maken. Bij deze vraag schrijft de CvTE in de tweede aanvulling op het correctievoorschrift dat niet te constateren is of de kandidaat een fout maakt, of de context opvat als een scheve cilinder. Om deze reden moet de maximumscore worden toegekend. Persoonlijk ben ik van mening dat dit voor vraag 9 op eenzelfde manier geldt. Waarom kan een kandidaat bij vraag 9 wel opschrijven dat het onmogelijk is als hij de context anders interpreteert, maar bij vraag 11 niet? Zoals hiervoor al genoemd, vind ik het een lastige kwestie.
Vorig jaar schreef ik al over de taligheid van een wiskunde-examen. Volgens mij doen de makers hun uiterste best om niet te veel verhalend bezig te zijn. Bij deze vraag is deze lovenswaardige inzet als een boemerang teruggekomen. Volgens mij was het een mooie vraag geweest als ze erbij hadden gezet dat de cirkels recht boven elkaar staan.

Omgekeerd evenredig verband

Whoohoo! Wiskunde in het wiskunde-eindexamen. Mijn hart maakte een sprongetje. Zeker na de frietstandaard is het geweldig om een vraag zonder context te hebben. Niks geen kwestie van begrijpend lezen. Het is ook onmogelijk om iets anders te interpreteren. Een formule, een grafiek, veel plezier met de bewerkingen. Wat een welkome afwisseling. Hier kunnen kandidaten laten zien dat ze hun bewerkingen beheersen.

Tokkelbaan

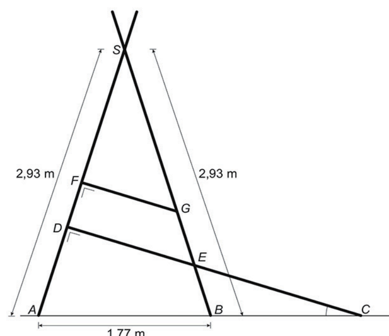
Een meetkundevraag. Vraag 15 laat je berekenen hoe groot de hoek *S* in de nok van een gelijkbenige driehoek is, waarvan de zijden zijn gegeven, zie figuur 3. Natuurlijk met behulp van de sinus. Een klassieker en dus een fijne vraag om in de meetkundemindset te komen.

Tokkelbaan

Timmerman Hamer heeft een tokkelbaan gemaakt in een speeltuin.



Hieronder staat een schematische weergave van het zijaanzicht van het bouwwerk waaraan de kabel van de tokkelbaan bevestigd is.



Driehoek *ABS* is een gelijkbenige driehoek. Punt *F* is het midden van *AS*. *CD* en *FG* staan loodrecht op *AS*.

15 Laat met een berekening zien dat hoek *S* in driehoek *ABS* afgerond 35° is.

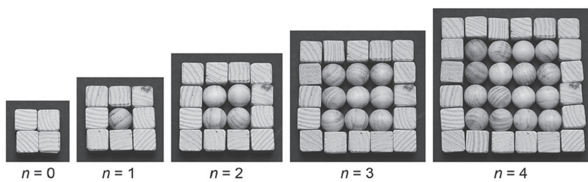
figuur 3

Vervolgens moet je de lengte van *FG* berekenen. Deze vraag borduurt voort op vraag 15, omdat je hoek *S* nodig hebt. Hoewel de waarde van hoek *S* gegeven wordt in vraag 15, denk ik toch dat deze vraag lastig is als je er bij vraag 15 niet uitgekomen bent. Daarna word je gevraagd om te laten zien dat de hellingshoek van *C* niet groter is dan 20°. Ik vond het een mooie vraag als afsluiter. Door de vorige twee vragen ben je nog bezig met goniometrie, maar het is een simpele optelling van hoeken van de driehoek die je hier nodig hebt.

Kubussen en bollen

Kandidaten gaven aan dat het examen steeds moeilijker werd. Ik denk dat ze daar gelijk in hebben.

Kubussen en bollen



Hierboven staan de eerste figuren uit een reeks met kubussen en bollen. Het nummer van een figuur is aangegeven met de letter *n*.

19 Om het aantal kubussen bij een figuurnummer te berekenen kun je een formule maken.
→ Schrijf deze formule op. Neem *k* voor het aantal kubussen en *n* voor het nummer van een figuur.

figuur 4

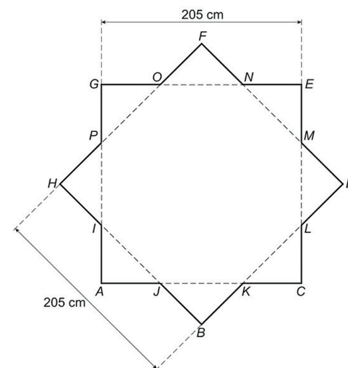
Fontein

In een park in Marokko ligt een stervormige fontein.



21 Op de uitwerkbijlage staat een bovenaanzicht van de fontein.
→ Teken alle symmetrieassen in dit bovenaanzicht.

De bodem van de waterbak van de fontein wordt gevormd door twee vierkanten van 205 cm bij 205 cm. Zie de tekening hieronder. De lengte van de zijde *AJ*, *JB*, *BK*, enzovoort is 60 cm.



figuur 5

Bij de reeks in figuur 4 moeten leerlingen een formule opstellen. Ik denk dat dit de moeilijkste vraag van het examen is. Het vraagt wel wat om het visuele om te zetten naar een tabel en vervolgens een hellinggetal en startgetal te vinden. Een mooie vraag, maar moeilijk.
Vraag 20 is erg lastig als vraag 19 niet is gelukt. In het hele examen wordt er steeds aangegeven welke waarde je moet gebruiken als je bij een vorige vraag geen antwoord hebt gevonden, maar hier niet. Hier had mogen staan welke formule je dan zou kunnen gebruiken.

Fontein

Deze vraag gaat over een stervormige fontein in een park in Marokko. Als eerste word je gevraagd de symmetrieassen te tekenen. Hier wordt er klakkeloos van uitgegaan dat de afmetingen van de fontein overal gelijk zijn, terwijl dit gegeven pas na vraag 21 naar voren wordt gebracht, zie figuur 5.
Vraag 22 is een leuke versie van Pythagoras, een echte inzichtvraag. Gevraagd wordt *HD* te berekenen en de kandidaat moet inzien dat dit de diagonaal is van een vierkant met zijde 205 cm. Vervolgens vraagt men de oppervlakte van het grondvlak, die je in de laatste vraag nodig hebt om uit te rekenen hoe hoog het water staat als er 1500 liter water in de bak zit. Bij deze laatste vraag staat wel gegeven hoe groot je de oppervlakte van de bodem mag nemen als de vorige vraag niet was gelukt. Een mooie laatste vraag van het examen.

'EEN REPRESENTATIEF EXAMEN, MET EEN PAAR SCHOONHEIDSFOUTJES. NIET ZO GOED ALS VORIG JAAR, MAAR NOG STEEDS PRIMA.'

Conclusie

Besluitend kan ik zeggen dat het een examen was met een goede opbouw qua moeilijkheid. Ook verdienen de makers van dit examen een pluim voor het beperken van de taligheid van het examen. Minpuntjes dit jaar zijn toch het ontbreken van de noodzakelijke informatie bij de *Frietzakstandaard*, waardoor twee vragen niet meer goed zijn, en een aantal doorrekenvragen waarbij geen alternatieve waarde wordt aangeboden in het geval de eerste vraag niet gelukt is. Een veelgehoorde klacht is dat kandidaten het examen lang vonden, wat wellicht meer te maken heeft met de moeilijkheid. Toch denk ik dat het niet te moeilijk is. Ook ben ik van mening dat de makers niet zijn doorgeslagen in hun poging om de hoeveelheid tekst tot een minimum te beperken. Als de *Frietzakstandaard* een uitgebreide contextopgave was geweest, was dezelfde fout naar alle waarschijnlijkheid ook in dit examen geslopen.
Al met al denk ik dat het een representatief examen is, met een paar schoonheidsfoutjes. Niet zo goed als vorig jaar, maar nog steeds prima.

Over de auteur

Hugo Duivesteijn is sinds drie jaar docent wiskunde in het vmbo. Vanaf dit schooljaar werkt hij op Werkplaats Kindergemeenschap VO in Bilthoven.
Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *hugoduivesteijn@gmail.com*

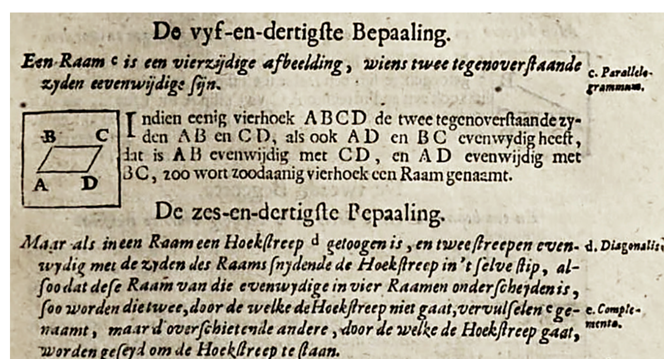
DE HOEKSTREEP

GRENSGEVAL



Jan Beuving

Dat wiskunde mooi, grappig en verrassend kan zijn, laat cabaretier en wiskundige Jan Beuving in de column De Hoekstreep zien.



De vyf-en-dertigſte Bepaling.

Een Raam [c] *is een vierzijdige afbeelding, wiens twee tegenoverſtaande zyden eevenwijdige ſijn.* — c. Parallelogrammum.

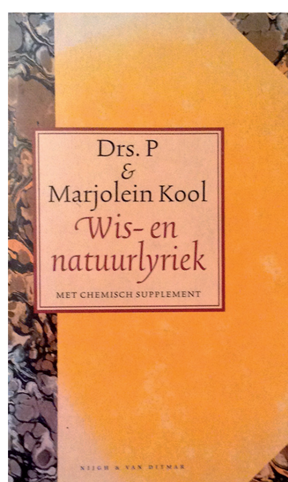
B C / A D

Indien eenig vierhoek ABCD de twee tegenoverſtaande zyden AB en CD, als ook AD en BC evenwydig heeft, dat is AB evenwijdig met CD, en AD evenwijdig met BC, zoo wort zoodaanig vierhoek een Raam genaamt.

De zes-en-dertigſte Bepaling.

Maar als in een Raam een Hoekſtreep [d] *getoogen is, en twee ſtreepen evenwydig met de zyden des Raams ſnydende de Hoekſtreep in 't ſelve ſtip, alſoo dat deſe Raam van die evenwydige in vier Raamen onderſcheyden is, ſoo worden die twee, door de welke de Hoekſtreep niet gaat, vervulſelen* [e] *genaamt, maar d'overſchietende andere, door de welke de Hoekſtreep gaat, worden geſeyd om de Hoekſtreep te ſtaan.* — d. Diagonalis. — e. Complementa.

Hoekstreep is 17de-eeuws Nederlands voor diagonaal. Bron: Claas Jansz. Vooght (1695). *Euclides beginselen der Meetkonst. Amsterdam.*



Toen ik op de universiteit les had van Hans Duistermaat, zei hij ooit dat je de randvoorwaarden bij grote stellingen in de wiskunde moest lezen als bezwerende gedichtjes. Ik leende hem toen mijn bundel *Wis- en Natuurlyriek* van Drs. P en Marjolein Kool uit. Toen ik jaren later die bundel kwijt was, realiseerde ik me dat die nog in het bezit van Duistermaat moest zijn. Ik toog met lood in de schoenen naar zijn kamer, want dat boek was hij vast vergeten, maar hij zag mij binnenkomen en zei: 'Jij komt voor je boek.' Hij tilde een stapel papieren op, en daar lag het. Alsof er geen tijd bestaan had tussen moment *A* en *B*, en alleen de rand van het interval van waarde was: boek gebracht *(A)* en boek opgehaald *(B)*.

Het is altijd op de grens dat dingen interessant worden. Wat te denken van de grens van achttien jaar, waarboven je alcohol mag kopen. Ik maakte daaromtrent laatst een aardig voorval mee. Drie jongens in de supermarkt wilden een kratje bier kopen. De regel is dat het hele gezelschap boven de achttien moet zijn, om tot aanschaf over te kunnen gaan. Een van de drie was dat niet, en dus kregen ze het krat niet mee. Het curieuze was dat ik daarna aan de beurt was, en ik maakte mij zorgen, want ik had een sixpack bier in mijn karretje. Nu ben ik 35 (de helft van mij mag drinken, en mijn andere helft bijna), maar ik had mijn kinderen bij me. Zij waren allebei overduidelijk niet boven de achttien, en toch kreeg ik mijn bier mee!
Ik ging dus naar de filiaalmanager. (Dat is die man van 'Dames en heren, pinkassa 6 gaat ook voor u open', wat ik altijd heel verwarrend vind, want er zijn maar drie pinkassa's in onze supermarkt. Het zou beter zijn als hij zou zeggen: dames en heren, pinkassa 2, in de cumulatieve telling bekend als kassa 6, gaat ook voor u open.' Maar dit terzijde.) Ik vroeg de filiaalmanager waar de grens lag: hoe oud mag je gezelschap onder de achttien zijn zodanig dat je toch als volwassene alcohol mag kopen? Maar daar was dan 'geen duidelijk antwoord op te geven'. Gevolg is dat ik nu iedere dag met mijn kind (alleen de oudste natuurlijk) naar de supermarkt moet, om proefondervindelijk vast te stellen waar de grens ligt. Dus nu word ik een alcoholist, omdat zij geen regels kunnen opstellen! Overigens kunnen de caissières beter rekenen dan die jongen die blijkbaar niet zelf had bedacht dat hij nog 17 was. (Misschien dat we leerlingen aan de hand van dit voorval toch het belang van rekentoetsen kunnen bijbrengen.) Ik moest voor mijn boodschappen € 30,50 afrekenen, en gaf twee biljetten van 20 euro.
Bij thuiskomst schreef ik het volgende gedichtje:

Ik hoorde de caissière aan me vragen
of ik heel misschien er 50 cent bij had.
Ik gaf haar toen meteen mijn winkelwagen,
omdat daar mijn laatste 50 cent in zat.

Daar had ze niet van terug.

Over de auteur

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier. Vanaf 1 september speelt hij zijn nieuwe voorstelling *Rotatie*. Kijk voor de speellijst op *www.janbeuving.nl.*

EXAMEN HAVO WISKUNDE A

Henk Hietbrink

Het havo wiskunde A-examen wordt besproken door Henk Hietbrink, lid van de werkgroep havo-vwo van de NVvW. Een geslaagd examen, maar wel met hier en daar wat kanttekeningen over de normering. De N-term van het examen is 1,2.

Inleiding

Tijdens het havo A-examen op 25 mei zit ik zelf achterin de zaal, niet om te surveilleren, maar om dit examen als een leerling te maken. Voor me liggen twee appels en naast me staat een pak sap. Met plezier heb ik alle opdrachten zelf gemaakt. Het rekenwerk valt mee en op de GR hoef ik geen moeilijke dingen te doen. De makers hebben hun best gedaan om aansprekende contexten te vinden. Ik onderdruk de neiging om snel te lezen, ik moet regelmatig echt goed lezen wat er staat. Ook neem ik de tijd om mijn antwoorden te controleren met alternatieve berekeningen. Na jaren geoefend te hebben met BMI is er nu een BMR. Ook de slotopdracht is een goede puzzel met veel ingrediënten, goed lezen, rustig schrijven, wiskundig niet echt moeilijk, maar een denkfout is snel gemaakt.
Het gaat er natuurlijk om hoe het examen voor de leerlingen was. Leerlingen die goed geoefend hebben met de examenbundel kunnen de bedoeling van de opdrachten herkennen. Hebben ze aardrijkskunde of biologie of natuurkunde, dan kunnen ze zich iets bij de contexten voorstellen. Voor leerlingen met een pakket met talen, cultuur of economie zijn deze contexten niet vanzelfsprekend. Megajoules en millimol zijn dan niet je ding. Het herleiden ging mij wel goed af, maar voor veel havisten is en blijft het een lastige vaardigheid. Na afloop laten de betere leerlingen weten dat het examen goed te doen was. Wel hadden ze echt alle tijd nodig. De zwakkere leerlingen vonden BMR een taaie opdracht en kwamen bij de slotopdracht in tijdnood. Zij vrezen voor een onvoldoende.

Wiskunde in een talig jasje

Om half zes druk ik het correctievoorschrift af. Op het eerste oog biedt het ruimte aan alternatieve uitwerkingen en de opmerkingen lijken verhelderend.

Bij de tweede opdracht, zie figuur 1, is het correctievoorschrift zelfs erg helder. Van mij hadden de opdracht en het antwoordmodel niet zo gehoeven, maar het voorschrift vertelt me precies hoe ik moet nakijken: het antwoord 'vanaf' duidt op een gesloten interval en is

Brandgevaar

In de zomer kan in natuurgebieden met veel bos gemakkelijk brand ontstaan. Het risico op bosbrand wordt vooral bepaald door de temperatuur van de lucht en door de hoeveelheid vocht in de lucht.
Om het risico op bosbrand goed in beeld te krijgen, wordt gebruikgemaakt van een **brandgevaarindex**.
In Scandinavië gebruikt men als brandgevaarindex de Angström Index, die wordt berekend met de volgende formule:

$$I_A = \frac{V}{20} + \frac{27 - T}{10}$$

Hierin is I_A de Angström Index, V de relatieve luchtvochtigheid in procenten en T de temperatuur in °C. De relatieve luchtvochtigheid V geeft de hoeveelheid vocht in de lucht aan ten opzichte van de hoeveelheid vocht die de lucht maximaal kan bevatten. De relatieve luchtvochtigheid kan niet meer dan 100% zijn.

tabel 1

I_A	**risico op bosbrand**
4 of groter	zeer klein
van 2,5 tot 4	klein
van 2 tot 2,5	groot
kleiner dan 2	zeer groot

Op een bepaalde zomerdag is de relatieve luchtvochtigheid 35%.

5p 2 Bereken bij welke temperaturen er op deze dag sprake is van een zeer groot risico op bosbrand.

Als de temperatuur constant is, dan neemt het risico op bosbrand toe als de relatieve luchtvochtigheid afneemt.

3p 3 Beredeneer zonder getallenvoorbeelden dat de formule hiermee in overeenstemming is.

figuur 1

dus fout. De opdracht betreft namelijk een open interval: als de brandgevaarindex kleiner dan twee is, dan is het brandgevaar zeer groot. De bijbehorende formule hangt onder andere af van de temperatuur. Bedoeling is dat kandidaten uitrekenen bij welke temperatuur de index 2 is, namelijk bij 24,5° en dan, vanwege dat open interval, antwoorden dat de temperatuur hoger moet zijn dan die 24,5°. Lezen is lastig en het is vanwege dit soort details dat ik de volle tijd nodig had om het examen foutloos te maken. Kandidaten die dat open interval zien, geven het juiste antwoord, 'hoger dan 24,5°' en verdienen 5 punten. Kandidaten die antwoorden met 'vanaf 24,5°' krijgen er slechts vier, want het 'vanaf' is fout. Met verschillende mensen heb ik hierover gesproken en de meningen zijn divers, maar uitgesproken. In het curriculum zijn we afgestapt van die open en gesloten intervallen, van de

notatie met ronde en gesloten haken, maar met woorden komen ze keihard terug. Expliciet wordt in het correctievoorschrift gesteld dat het woord ‘vanaf’ tot puntenaftrek leidt. Harde wiskunde met strikte conventies wordt in een verhaaltje verpakt, maar antwoord geven met de soepelheid van het dagelijks taalgebruik wordt afgestraft.

Examenbesprekingen

Zaterdag ben ik naar de centrale examenbespreking geweest en maandag naar de regionale bijeenkomst. Waar op het forum de meningen divergeren en weinigen zoeken naar consensus, is de sfeer op de vergaderingen juist convergerend. Ook is er op de regionale vergadering ruimte voor persoonlijke vragen. Tip voor volgend jaar: kom langs!

Weinig aandacht voor de klassiekers

In vergelijking met de jaren van het oude programma lag er dit jaar, net als vorig jaar, veel nadruk op herleiden. Klassiekers als het opstellen van de vergelijking van een rechte lijn, lineair interpoleren, het uitrekenen van een groeifactor, het checken van een omgekeerd evenredig verband en het opstellen van een formule voor een exponentieel verband ontbraken echter deze keer. Daar hebben we in de klas hard op geoefend. Misschien dat deze onderwerpen terugkomen in de herexamens.
Nu heb ik ze gemist.
Hieronder komen kanttekeningen bij de verschillende opdrachten en mijn goede voornemens voor volgend jaar.

Brandgevaar

Brandgevaar, zie figuur 1, opent met een eenvoudige formule met twee variabelen T en V, maar verpakt in breuken ziet het er ingewikkeld uit. De eerste vraag is naar het minimum en maximum van de brandgevaarindex. Leerlingen druk ik op het hart om de theoretische waarden uit te rekenen en niet stil te staan bij bedenkingen of nul en honderd wel kunnen. Bovendien, lees wat er staat: 100% is het maximum. De tweede opdracht betreft die ongelijkheid met dat open interval. Hier wreekt zich dat de tekst alleen gehele getallen noemt en dat je moet weten dat je desondanks met decimale getallen moet antwoorden. Volgend jaar is deze opdracht een goed voorbeeld om te oefenen hoe een ongelijkheid moet worden opgelost. Dat het kiezen van andere getallen uit den boze is. Dat wie in plaats van grenswaarde 2 kiest voor 1,9 of 1,99, punten verliest. Dat je met juridische precisie het verschil moet weten tussen ‘vanaf’ en ‘groter dan’. Op de centrale examenbespreking is gesproken over de wonderlijke neiging van leerlingen om in plaats van het woord ‘is’, het = teken te gebruiken. Wat vind je van een antwoord als T = groter dan 24,5 of $T = > 24{,}5$? Trek je daar een punt voor af? Ook is een lans gebroken voor het passabel verklaren van ‘vanaf 24,6’, maar we konden niet voorbijgaan aan het correctievoorschrift.
Bij de derde opdracht wordt gevraagd om een redenering, zie figuur 1. Van leerlingen wordt verwacht dat ze apart kijken naar wat die V doet en wat die T doet in de formule van index I_A. Besproken is wat we vinden van het antwoord ‘als V afneemt en T constant is, dan daalt de index I_A en neemt dus het risico toe’. Dit antwoord klinkt goed, maar herhaalt de vraag, laat geen inzicht zien in hoe de formule werkt en is dus geen punten waard. Ook volgend jaar zet ik in op de mantra: drie punten betekent minstens drie stappen in de redenering en bij iedere stap wil ik een krul zetten.
Tot mijn verrassing gaat het wegwerken van de haakjes bij het herleiden in de vierde opdracht bij veel leerlingen goed en ook de kleinere onderzoeksvraag gaat goed. Mooi dat er dit jaar twee onderzoeksvragen zijn, een kleine aan het begin en een grote aan het einde.

Referentiewaarden

Referentiewaarden is een korte statistiekopdracht met twee simpele vragen over standaardafwijking en effectgrootte. De berekening van de standaardafwijking is drie punten waard. Iedereen die alleen de laatste bol opschrijft, geeft het goede antwoord en pakt de drie punten. Maar wie niet laat zien dat een 95% interval vier keer de standaardafwijking omvat, die niet door 4 deelt, maar zonder toelichting door 2 deelt, grijpt mis. Sommige leerlingen rekenen het gemiddelde correct uit en krijgen nog een punt. Hoewel de opdracht simpel is, is de inleidende tekst dat beslist niet. Ik heb die inleiding drie keer gelezen om zeker te weten wat ik met die biljoenen en millimollen moest doen. Moet ik nog iets omrekenen? Niets daarvan. Die mollen waren relevant voor de volgende opdracht, maar ook daar hoefde je niet om te rekenen. Voorheen stonden de eenheden overzichtelijk achter de grootheid in de tabel. Dat vind ik veel rustiger.
Opdracht 7 vraagt om met behulp van het formuleblad een uitspraak te doen. Het correctievoorschrift noemt alleen de berekening van effectgrootte. In de vergadering is vastgesteld dat het tekenen van een boxplot een doodlopende weg is, omdat de tekst geen informatie geeft over de kwartielgrenzen. Gevolg is dat de meeste leerlingen alles of niets scoorden.

Aardbevingen

De derde context gaat over aardbevingen, zie figuur 2. Gevraagd wordt om het exponentiële verband te herkennen en om 30^3 uit te rekenen. Wonderlijk genoeg geven te veel leerlingen het foute antwoord 3×30.
De context gaat verder met een exponentiële formule. Opdracht is om de kracht van de naschok te berekenen. Gegeven is dat ook de naschok een zware schok is, ondanks dat bij de naschok slechts 9% van de hoeveelheid energie vrijkwam die bij de aardbeving vrijkwam. Antwoord moet zijn $R = 5{,}6$. Op de centrale examenbespreking is nagedacht over hoe om te gaan met lage uitkomsten als $R = 1{,}6$. Dit antwoord is onlogisch omdat in de tekst staat dat $R = 3{,}3$ een lichte beving is en dat

De aardbeving van l'Aquila



Aardbevingen verschillen in kracht. De kracht van een aardbeving wordt meestal weergegeven op de schaal van Richter.

In de nacht van 5 op 6 april 2009 werd de Italiaanse stad l'Aquila getroffen door een zware aardbeving. De avond ervoor werd er al een lichte beving gevoeld die een kracht had van 3,3 op de schaal van Richter. De zware aardbeving 's nachts, die veel schade aanrichtte, had een kracht van 6,3 op de schaal van Richter.

Bij elke aardbeving komt energie vrij. Volgens een wetenschapper geldt de volgende vuistregel: als de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt, dan is de hoeveelheid vrijgekomen energie ongeveer 30 keer zo groot.

Er is bij de zware aardbeving 's nachts veel meer energie vrijgekomen dan bij de lichte beving van de avond daarvoor.

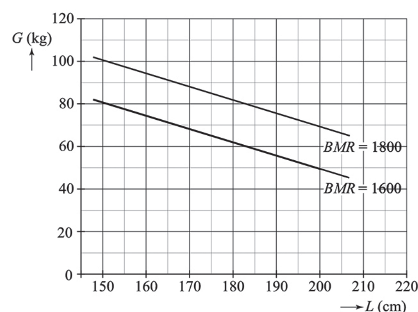
3p **8** Bereken met behulp van de vuistregel hoeveel keer zoveel energie er 's nachts vrijkwam vergeleken met de avond ervoor.

figuur 2

de naschok een zware schok is. Besloten is om leerlingen dit niet aan te rekenen. Dat is fijn voor alle leerlingen die met een verkeerde berekening beginnen, de eerste bol missen, maar vervolgens het hele stappenplan netjes uitvoeren. Opdracht 10 is een verrassing omdat de kandidaten op logaritmisch papier enkele punten moeten tekenen. Volgens de syllabus staat bij de parate vaardigheden dat een kandidaat een logaritmische schaalverdeling kan aflezen. Op het forum verschenen ogenblikkelijk vragen of zelf tekenen niet meer vergt dan aflezen, maar het CvTE liet snel weten 'Het aflezen van een logaritmische schaalverdeling behoort tot de parate vaardigheden. Als een leerling een punt moet kunnen aflezen, moet hij ook in staat zijn een punt te tekenen op een logaritmische schaalverdeling'. Het antwoordmodel voorziet wel in punten voor het tekenen, maar beloont niet het maken van een tabel. Dat vind ik een gemiste kans. Bij $R = 1$ hoort $E = 1{,}9$ MJ. Veel kandidaten kunnen de verleiding niet weerstaan en laten de grafiek door 'de oorsprong' gaan, maar dat is $10^0 = 1$. Andere kandidaten vinden derde streepje logisch (want 0, 1, 2, ...) maar dat derde streepje staat voor $3 \cdot 10^0$. In de volgende jaren deel ik net als alle vorige jaren het papier met de logaritmische schaalverdeling uit en gaan we klassikaal samen punten zetten onder het motto 'van doen leer je meer dan van kijken'.

BMR (Basal Metabolic Rate)

Na jaren geoefend te hebben met *BMI* komt de *BMR*, opnieuw een opdracht met meer variabelen. Opdracht 11 is een makkelijke instapper, maar bij opdracht 12 begrijpen veel havisten niet dat het de bedoeling is om te redeneren met toenames. Bij opdracht 13 gaat veel mis met het herleiden, plussen, minnen, wisselen van links naar rechts. Ondanks jaren oefenen met balansmethode en andere aanpakken, blijft deze vaardigheid niet hangen. Zouden er leerlingen zijn die houvast hebben gehad aan de figuur van opdracht 14? Die lijn van $BMR = 2000$ kcal moet er toch ook zo uitzien. En die van $BMR = 1800$ kcal zit er dan tussenin. Zoiets kan een leerling met wiskunde B zeggen, maar de gemiddelde havist met wiskunde A ziet dat niet. Met de algebra van opdracht 15 krijgt *BMR* voor leerlingen definitief het predicaat lastig. In figuur 3 zie je de *BMR*-formule met drie alternatieve uitdrukkingen. Veel leerlingen zien niet dat je *G* kunt uitdrukken in *W*, dat je *G* kunt substitueren door de nieuwe uitdrukking met *W* en vervolgens het getal op de puntjes uit kunt rekenen. Voor docenten vanzelfsprekend, maar voor de gemiddelde havist zijn het te veel letters. Ze zien het niet.



Een formule van de *BMR* voor mannen luidt:

$$BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$$

In deze formule is G het gewicht in kg, J de leeftijd in jaren, L de lengte in cm en BMR in kcal.

In de Verenigde Staten hanteert men soortgelijke formules maar met andere variabelen. Men gebruikt voor het gewicht de variabele W (weight) in pounds, voor de lengte de variabele H (height) in feet en voor de leeftijd in jaren de variabele Y (years). Er geldt:

$$W = 2{,}2 \cdot G$$
$$Y = J$$
$$H = 0{,}033 \cdot L$$

Met deze gegevens kun je de formule van BMR opstellen zoals die in de Verenigde Staten gebruikt wordt in de vorm

$$BMR = \ldots \cdot W - 5 \cdot Y + \ldots \cdot H + 5$$

figuur 3

Vol spanning wacht ik af hoe heel Nederland scoort op deze reeks opdrachten. De opdracht ga ik volgend jaar zeker oefenen en ook zal ik er de nodige variaties op maken.

Lunchen

De kandidaten herpakken zich bij *Lunchen*, zie figuur 4. Lekker rekenen aan opdracht 16 over de kosten van de metrokaartjes. Dat gaat goed. Daarna de cumulatieven pakken om het lunchrestaurant te identificeren, een conclusie trekken aan de hand van een betrouwbaarheidsinterval en twee argumenten geven waarom de opzet van het onderzoek niet goed is. Volgend jaar is dit een fijne opdracht om klassikaal te bespreken. Een grote groep leerlingen probeert het lunchrestaurant te herkennen aan het gemiddelde, maar dat kan niet omdat de mediaan niet gelijk hoeft te zijn aan het gemiddelde.

Lunchen

Een paar jaar geleden heeft men in de Verenigde Staten een onderzoek gehouden onder mensen die in hun lunchpauze ergens gaan eten. Men wilde weten wat er zoal als lunch besteld werd en hoeveel kilocalorieën (kcal) de bestelde lunch bevatte.



Het onderzoek werd uitgevoerd in New York City. Uit alle 1064 lunchrestaurants die op hun website calorie-informatie hadden staan, werden er willekeurig 167 uitgekozen waar het onderzoek werd uitgevoerd. Verschillende teams van onderzoekers gingen rond lunchtijd naar deze lunchrestaurants om klanten te informeren over het onderzoek. Alleen klanten van 18 jaar en ouder mochten meedoen. Ze moesten dan een individuele bestelling plaatsen. Wie vervolgens zijn kassabonnetje inleverde, kreeg als beloning een metrokaartje van 2 dollar. Vrijwel alle klanten wilden meedoen met het onderzoek, mede vanwege de beloning. De onderzoekers kregen op deze manier heel wat kassabonnetjes in handen. Achteraf bleek dat 5,6% van de ingeleverde kassabonnetjes onbruikbaar was. De overige 7318 kassabonnetjes konden worden gebruikt voor het onderzoek.

16 Bereken hoeveel dollar de onderzoekers kwijt waren aan metrokaartjes.

figuur 4

De formule voor het betrouwbaarheidsinterval staat op het formuleblad. Een groep leerlingen schrijft die formule netjes over, met wortel en al, maar verzuimt wortel te trekken. Je vraagt je af hoe dat komt. Bij opdracht 20 kregen de kandidaten een tabel met kolommen als aantal, gemiddelde en standaardafwijking en een percentage. Met die gegevens kun je op twee manieren rekenen om tot een uitspraak te komen: effectgrootte of φ. De kandidaten die voor effectgrootte gaan, doen dat voor de tweede keer in dit examen en zij pakken vaak alle punten. De kandidaten die voor φ gaan, hebben het een stuk lastiger.
Ze weten vaak niet hoe ze aan een geschikte 2 × 2 tabel moeten komen. De kortste weg is door te werken met die percentages en hun complement. Wellicht dat kandidaten gedacht hebben dat ze ondanks een foutief opgestelde tabel toch punten konden scoren. Zo zijn er leerlingen die φ berekenen op willekeurig twee kolommen als aantal en standaardafwijking. In het verslag van de centrale examenbespreking staat nu dat dit 0 punten oplevert, zie figuur 5. Ik ben benieuwd of eerste en tweede corrector zich hieraan willen houden. Les voor volgend jaar is dat leerlingen moeten weten dat ze niet met zo maar wat mogen beginnen en dan hun kunstje doen.

Ecologische voetafdruk

Tot slot de onderzoeksopdracht. Daar kwam niet iedereen meer aan toe. De ecologische voetafdruk is een actueel

tabel 2

	aantal geldige kassabonnetjes	aantal kcal		percentage dat meer dan 1000 kcal bestelt
		gemiddelde	standaardafwijking	
calorie-informatie wel gelezen	568	713	301	17,5
calorie-informatie niet gelezen	1237	766	584	23,0

uit het verslag van de examenbespreking:

Opgave: Lunchen		
Vr. 16	Geen opmerkingen	
Vr. 17	Rekenen met gemiddelde	0 pnt
Vr. 18	Wortel in de formule niet gebruiken (wortel(n) ontbreekt-> vereenvoudiging	Maximaal 1 pnt
Vr. 19	Geen opmerkingen	
Vr. 20	Phi met andere, ongelijksoortige kolommen dan in het correctiemodel gegeven zijn.	0 pnt

figuur 5

thema. Nieuw is dat havisten zelf de formules en de tabellen moeten maken. Het correctievoorschrift vraagt om volledige tabellen, maar veel kandidaten noteren alleen het relevante deel. Het verslag van de centrale examenbespreking zwakt de eis van het voorschrift af. Ik kan niet zien wat ze echt gedaan hebben, maar omdat ze de formules opschrijven en de relevante getallen, verwacht ik dat ze de tabel echt gezien hebben. Ik hoop dat mijn tweede corrector dit met mij eens is, want anders verliezen leerlingen hier twee punten.

Tot slot

Het examen havo wiskunde A 2018 is qua onderwerpen een geslaagd examen, maar qua wiskundige onderwerpen bijzonder omdat enkele traditionele onderwerpen als het opstellen van een lineair of exponentieel verband ontbraken. Voor volgend schooljaar is het een prima oefenexamen, maar wel samen met een wat traditioneler examen als dat van 2017 eerste tijdvak. Herleiden is dit jaar, evenals vorig jaar, stevig aangezet en zeker een waarschuwing voor de toekomst. Havo wiskunde A is tegenwoordig het vak waar je actief met formules werkt, niet alleen maar wat getallen invullen of getallen vinden, maar zelfstandig aan de slag om de formule anders te schrijven. De klassieke formulering 'toon aan dat' is dit jaar niet gebruikt. Leerlingen moeten zelf uitzoeken wat de formule wordt. Ook bij statistiek is de norm helder. Het wordt niet gewaardeerd als kandidaten zomaar wat gegevens of getallen pakken en zonder nadenken het recept uitvoeren.

Over de auteur

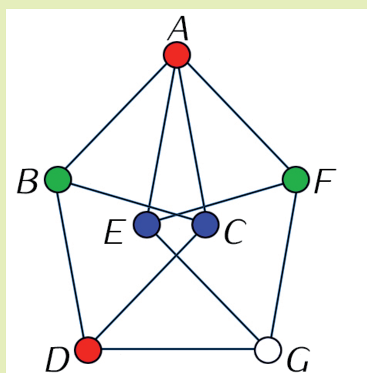
Henk Hietbrink is docent wiskunde op het Hermann Wesselink College te Amstelveen en beheerder van de website *www.fransvanschooten.nl*.
E-mailadres: *hietbrink.h@planet.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

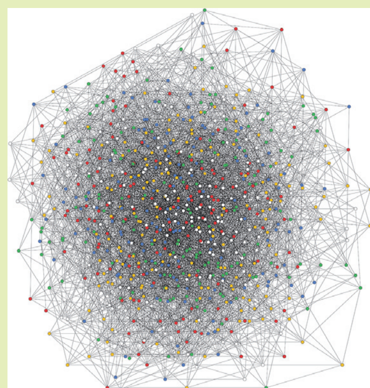
Minimaal vijf kleuren voor Hadwiger-Nelson

Je wilt het platte vlak gaan kleuren, maar met de merkwaardige eis dat elk tweetal punten op afstand 1 verschillende kleuren moeten krijgen. Hoeveel kleuren heb je dan minstens nodig? Dit probleem, in de jaren vijftig van de vorige eeuw geformuleerd door de Zwitser Hugo Hadwiger en de Amerikaan Edward Nelson, is nog steeds niet opgelost. Tot voor kort was bekend dat je in elk geval niet meer dan zeven kleuren nodig hebt en minstens vier. Door te kijken naar een gelijkzijdige driehoek met zijden 1 zie je dat je in ieder geval drie kleuren nodig hebt. Het patroon in figuur 1 (alle lijntjes hebben lengte 1) maakt duidelijk dat je in elk geval vier kleuren nodig hebt.



figuur 1

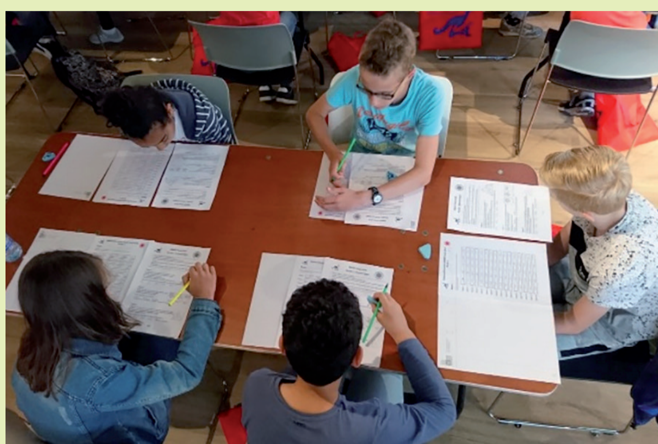
Dit voorjaar is die ondergrens opgerekt naar vijf kleuren. De Britse gerontoloog, informaticus en amateurwiskundige Aubrey de Grey vond een patroon van 1581 punten waarvoor vijf kleuren nodig zijn. De Nederlandse wiskundige Martijn Heule (Texas University) wist de oplossing van De Grey te vereenvoudigen tot een configuratie van slechts 826 punten, zie figuur 2.



figuur 2

Arnout Jaspers schreef hierover een artikel voor Nemokennislink, zie *https://www.nemokennislink.nl/publicaties/het-platte-vlak-heeft-minstens-vijf-kleuren-nodig/*.
Bron: *NRC Handelsblad*, 25 april 2018

SMART-finale 2018 W4Kangoeroe



Dit jaar werd voor de vijfde keer de SMART-finale van W4Kangoeroe georganiseerd. De beste twintig deelnemers van groep 7, van groep 8 en van het vmbo-smart werden uitgenodigd om op woensdag 13 juni deel te nemen aan deze finale. In museum Boerhaave (Leiden) streden op deze leuke dag uiteindelijk 53 leerlingen (25 uit groep 7, vijftien uit groep 8 en dertien van het vmbo) voor een plaatsje bij de beste drie van hun groep. De finale werd gespeeld in twee rondes (één met zestien meerkeuzevragen en één met acht open vragen). Alle deelnemers kregen dezelfde opgaven (zie *www.w4kangoeroe.nl*) en de maximale score was 56 punten.



De uitslag was als volgt:

Groep 7:
1. Jorik van der Stouwe, Apeldoorn, 52 punten
2. Rens Blom, Amstelveen, 51 punten
3. Robert Stepanyan, Sittard, 43 punten

Groep 8:
1. Allie Zong, Veldhoven, 54 punten
2. Jonathan Karels, Lunteren, 49 punten
2. Ryan Staal, Barendrecht, 49 punten

Vmbo:
1. Mengyao Xie, Gorredijk, 40 punten
2. Sven van Rens, Meerlo, 36 punten
3. Thomas Broos, Borne, 34 punten

Het gemiddelde in groep 7 was 33 punten, in groep 8 was dat 41 punten en 26 punten bij het vmbo. De gemiddelden waren daarmee een stuk hoger dan vorig jaar; waarschijnlijk waren de opgaven dit jaar iets makkelijker.
Bron: *www.w4kangoeroe.nl*

CWI onderzoekers maken energienetwerk stabieler met wiskunde



Onderzoekers van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) hebben ontdekt hoe schommelingen van wind- en zonne-energie storingen in elektriciteitsnetwerken kunnen veroorzaken. Het wiskundig raamwerk, ontwikkeld door de onderzoekers, biedt ondersteuning bij het voorspellen van mogelijke stroomstoringen in het hoogspanningsnetwerk. Het wetenschappelijk artikel is gepubliceerd in *Physical Review Letters* op 21 juni 2018. Extreme weersomstandigheden kunnen ertoe leiden dat lijnen in energienetwerken overbelast raken en daardoor een storing krijgen. Een storing veroorzaakt een herverdeling van energiestromen, waarmee de druk op de overgebleven lijnen in het netwerk toeneemt. Dit kan meer storingen en zelfs zogenaamde *black-outs* veroorzaken. Het begrijpen van dit proces is van groot belang, omdat de transformatie naar een duurzame samenleving niet moet leiden tot een achteruitgang van de kwaliteit van het energietransport.
CWI onderzoekers Tommaso Nesti, Alessandro Zocca en Bert Zwart hebben onderzocht hoe storingen zich kunnen ontwikkelen onder de invloed van wind- en zonne-energie. Ze gebruikten daarvoor een analogie uit de statistische fysica, waardoor ze een groot energienetwerk met veel input van duurzame energie kunnen interpreteren als een interactief deeltjessysteem. Hierdoor kunnen de lijnen in het netwerk die het meest kwetsbaar zijn voor schommelingen in weerpatronen geïdentificeerd worden, evenals het meest waarschijnlijke scenario volgens welke deze storingen zich zullen verspreiden over het netwerk.
Het blijkt dat verstoringen op de elektriciteitslijnen kunnen worden veroorzaakt door een cumulatief effect van kleine fluctuaties die zich voordoen in een groot geografisch gebied. Het aantal opeenvolgende storingen kan veel hoger uitvallen dan in voorspellingen gedaan door simpelere modellen, waarbij geen rekening werd gehouden met weerpatronen. Meer informatie is te vinden via *https://www.cwi.nl/nieuws/2018/cwi-onderzoekers-maken-energienetwerk-stabieler-met-wiskunde*
Bron: cwi.persbericht

EXAMEN HAVO WISKUNDE B

Femke van den Berg-Douma

Dit jaar geen misverstanden over een bewijs, nee, gewoon een goed examen dat recht doet aan leerling én docent. Aldus Femke van den Berg-Douma in deze recensie.

Toen ik de zaal binnenkwam waren de leerlingen al ruim een uur hard aan het werk met hun examen wiskunde B. Ik hoefde niet te surveilleren, dus nieuwsgierig bladerde ik snel het examen door. Mijn allereerste indruk was dat het geen makkelijk examen was, een aantal opgaven met veel context, twee grafieken met een bijzondere schaalverdeling, en andere grafieken die er ook best ingewikkeld uitzagen. Ik nam plaats aan een leeg tafeltje in de examenzaal en ging snel aan de slag om de opgaven te maken, zodat ik tegelijk met de leerlingen klaar zou zijn. In een uur was ik er doorheen. Mijn eerste indruk was blijven hangen – vooral de opgave over horizonafstand moest ik zelf goed lezen voordat ik het door had. Na afloop van het examen stond ik buiten om de reacties van de leerlingen te peilen. Zij waren gelukkig een stuk positiever en vonden dat het best goed was gegaan. Opgelucht nam ik het werk mee om het na te kijken. Binnen twee dagen had ik het werk van mijn leerlingen nagekeken en nam ik plaats bij de landelijke bespreking van het examen. Ook hier was men tevreden over het examen, het was goed te doen voor de meesten maar lastig voor de minder sterke leerlingen. Bovendien kwamen er allerlei onderwerpen aan bod. Na afloop fietste ik met een gerust hart naar huis, toch wel trots op het feit dat waarschijnlijk bijna al mijn leerlingen een voldoende zouden hebben voor dit examen.

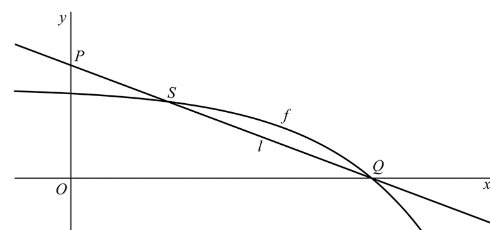
Macht van 2

Bij de eerste vraag van het examen mogen de leerlingen meteen hun vaardigheden tonen in het exact oplossen van een machtsvergelijking. Kennis van de rekenregels voor machten is wel belangrijk, en wie deze niet kent gaat toch echt de mist in bij deze opgave. Gelukkig gaat dit bij de meesten goed. Vraag 2 is wat meer werk, leerlingen moeten een nulpunt vinden van de grafiek, vervolgens de formule van een lijn opstellen en daarna een snijpunt vinden. Sommigen lopen vast omdat ze exact proberen te werken, vooral bij de laatste stap. Ik neem aan dat elke docent dit jaar de examenwerkwoorden erin heeft gehamerd, na alle ophef over de 'bewijsopgave' van afgelopen jaar, dus het is jammer om te zien dat een aantal leerlingen hier toch de verkeerde methode kiest. Bij de laatste vraag van deze context moeten leerlingen een formule opstellen van de translatie van de grafiek, zie figuur 1.

Macht van 2

De functie f is gegeven door $f(x) = 4 - 2^{0,3x-2}$.

figuur



De grafiek van f wordt 20 naar links en 10 omhoog geschoven.
Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie g.
De functie g kan geschreven worden in de vorm $g(x) = a + b \cdot 2^{0,3x}$.

3 Bereken de waarden van a en b.

figuur 1

Hier is bij de examenbespreking veel discussie over, want hoe verdeel je nou de punten als de leerling alleen de verticale translatie goed doet? De horizontale translatie is een stuk ingewikkelder, de leerling moet echt alleen de x vervangen door $(x + 20)$ en dat gaat nogal eens mis, en hoe reken je dan door met het herleiden? Helaas is deze vraag door mijn klas uitermate slecht gemaakt, slechts een enkeling weet hier 2 of 3 punten te behalen, dus voor mij is dit onderwerp een aandachtspuntje voor de toekomst.

Afstand 5

Ha fijn, een meetkundeopgave. Hier hebben we veel op geoefend, en het zijn nog twee redelijk standaardvragen ook. Eerst bij vraag 4 de afstand tussen een punt en

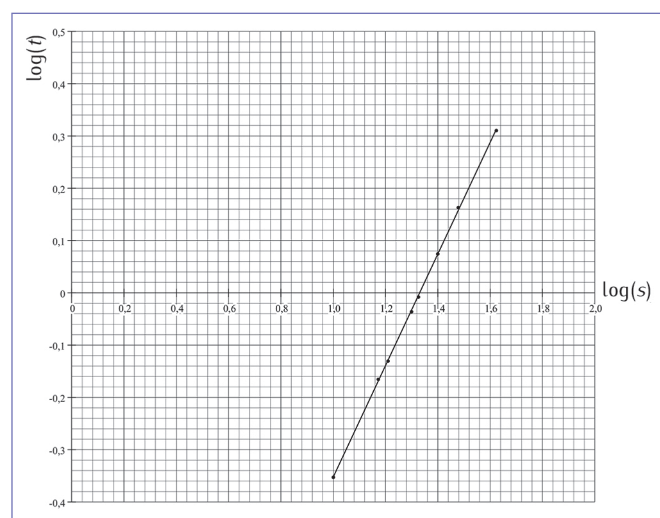
een lijn aantonen, dus de vergelijking van de loodlijn opstellen, snijpunt bepalen en dan de afstandsformule toepassen. Ik heb in mijn groep expres de 'vwo-manier' met de formule

$$d(P,k)=\frac{|ax_P+by_P-c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

niet uitgelegd en daar ben ik blij om, want de loodlijnmethode werkt prima en de leerlingen maken de vraag zeer goed. Bij vraag 5 moet een cirkelformule worden omgeschreven om het middelpunt van de cirkel te vinden en vervolgens twee afstanden worden vergeleken. Ook hier gaat weinig mis bij mijn groep, het is duidelijk dat dit onderwerp er goed in zit, maar het is dan ook echt geen lastige opgave en een mooie mogelijkheid voor alle leerlingen om punten te scoren.

Hardlopen

De eerste opgave met redelijk wat context is makkelijker dan hij op het eerste gezicht lijkt, maar dat betekent ook dat een aantal leerlingen hier te moeilijk gaat denken en daardoor fouten maakt. Bij het onderzoeken van de formule in opgave 6 is het bijvoorbeeld al genoeg om te laten zien dat, als de afstand verandert van bijvoorbeeld 1 naar 2, de verwachte gemiddelde snelheid verandert met een factor van ongeveer 0,96 in plaats van 0,94 en de vuistregel van 6% afname dus niet volgt uit de formule. Leerlingen gebruiken meerdere voorbeelden, onhandige voorbeelden, en denken soms dat de gevonden waarde 'wel ongeveer overeenkomt' met 6% afname. Ook bij vraag 7 denken sommige leerlingen te moeilijk, zo zie ik meerdere leerlingen eerst de gemiddelde snelheid uitrekenen voor alle afstanden voordat ze een looptempo berekenen voor dit gemiddelde – ook veel ingewikkelder dan wat er gevraagd werd.



figuur 2

Opgave 8 is wat dit betreft het toppunt, zie figuur 2. Waar leerlingen mogen aflezen uit de grafiek (die weliswaar iets verder moet worden doorgetekend) gaan sommigen een formule opstellen voor de lijn in de vorm $\log(t) = a \cdot \log(s) + b$. Dit gaat zelden helemaal goed, en ik zie dat vooral de sterkere leerlingen hier punten laten liggen. Het lijkt erop dat mijn leerlingen van slag zijn geraakt door het feit dat in de gehele opgave iets anders wordt gevraagd dan standaard is. Ze dachten dat het dan 'wel heel moeilijk zou zijn' en wrongen zich vervolgens in allerlei bochten om het inderdaad zo moeilijk mogelijk te maken voor zichzelf. Persoonlijk had ik liever een wat meer algebraïsche toepassing van logaritmen gezien in het examen, dus ik ben niet zo blij met deze vraag.

De helling

Over vraag 9 ben ik ook niet helemaal tevreden.

Hier moet namelijk de kettingfunctie $f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^3-\frac{1}{2}x$

gedifferentieerd worden en vervolgens een ongelijkheid worden opgelost, maar het is niet te zien of de leerling de kettingregel hier compleet begrijpt, aangezien er alleen maar vermenigvuldigd hoeft te worden met 1. Dit komt gelukkig in vraag 13 wel terug, maar ik vraag mij dan af wat de toegevoegde waarde is van het nogmaals laten differentiëren van een kettingfunctie in de huidige opgave. Het gaat mijn leerlingen overigens goed af, dat differentiëren, alleen die ongelijkheid blijft een struikelblok voor velen, vooral de laatste stap. Ik vind het, net als een aantal collega's op het forum, jammer dat er 2 punten staan voor het uiteindelijke antwoord, zie figuur 3, in plaats van 1 punt voor een schets of andere uitleg waaruit de oplossing blijkt en 1 punt voor de daadwerkelijke oplossing. Helaas verspeelt een van mijn leerlingen hier twee punten, alleen maar omdat ze in haar schets de parabool verkeerdom heeft getekend.

De helling

9 maximumscore 6

- De afgeleide van f is $f'(x)=2(x-1)^2-\frac{1}{2}$ — 1
- De vergelijking $2(x-1)^2-\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ moet opgelost worden — 1
- Herschrijven tot $(x-1)^2=2$ — 1
- Dit geeft $x=1-\sqrt{2}$ of $x=1+\sqrt{2}$ — 1
- De helling is groter dan $3\frac{1}{2}$ voor $x<1-\sqrt{2}$ en voor $x>1+\sqrt{2}$ — 2

Opmerking
Als de kandidaat alleen de oplossing $x<1-\sqrt{2}$ of alleen de oplossing $x>1+\sqrt{2}$ heeft gevonden, voor deze vraag maximaal 4 scorepunten toekennen.

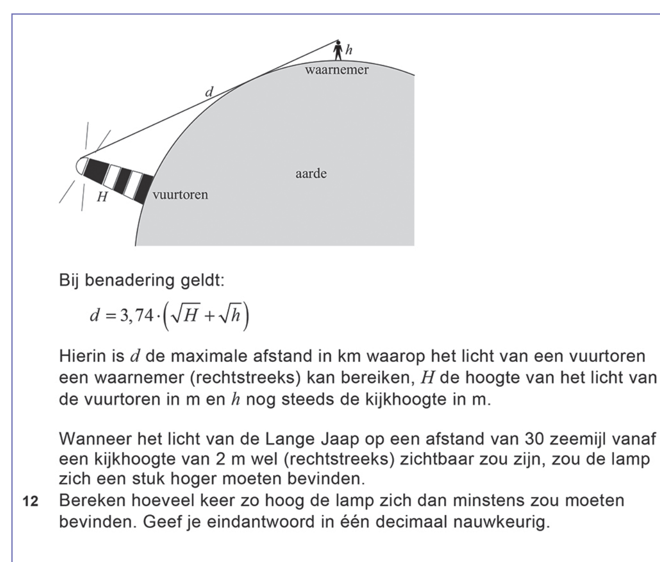
figuur 3

Horizonafstand

De opgave waar ik meteen zelf al over struikelde blijkt ook voor de leerlingen niet de makkelijkste te zijn geweest. We krijgen heel veel informatie: definities van kijkhoogte en horizonafstand, een plaatje dat de

horizonafstand weergeeft, een grafiek met een schaal in $\sqrt{h}$, en een evenredigheid tussen de horizonafstand en $\sqrt{h}$. Veel verschillende dingen om te verwerken voordat we kunnen beginnen aan de eerste vraag. Nu blijkt het aflezen van de grafiek bij vraag 10 goed te doen, hoewel sommige leerlingen daarna de wortel nemen in plaats van het kwadraat, om h te berekenen. In vraag 11 moet de formule $a = 3741\sqrt{h}$, voor horizonafstand in meters, omgeschreven worden naar de horizonafstand in kilometers, $k = \sqrt{c \cdot h}$.

Ongeveer de helft van mijn leerlingen gaat hier de mist in, maar dat had ik wel verwacht want dit vinden ze moeilijk omdat het best abstract is, zo'n formule met alleen maar letters. Voor de laatste vraag van de opgave, zie figuur 4, krijgen we nog een plaatje en nog een formule voorgeschoteld, en is het goed opletten geblazen, want we krijgen een afstand in zeemijlen terwijl de formule geldt voor kilometers. Met de rekenfouten die hier gemaakt worden krijgen de leerlingen soms wel hele hoge vuurtorens...



figuur 4

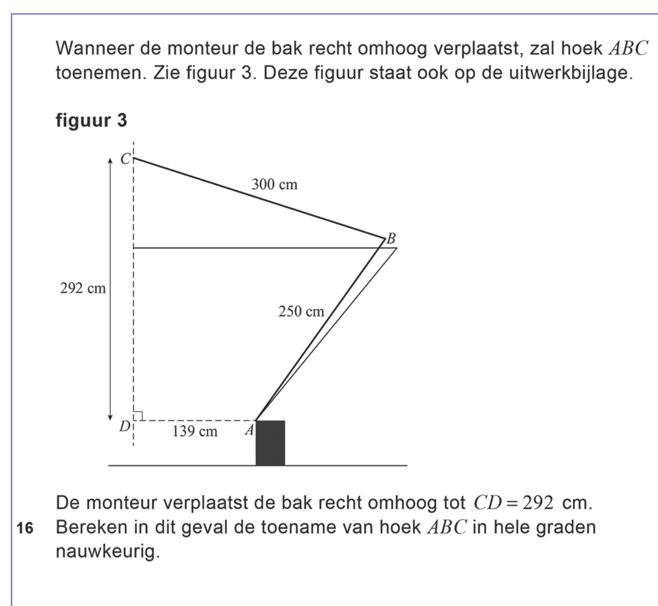
Raaklijnen door de oorsprong

Ik ben blij als ik zie dat de volgende opgave een mooie 'kale' opgave is, dat hebben mijn leerlingen wel nodig na zoveel begrijpend lezen. Vraag 13 gaat dan ook best aardig: we moeten een raaklijn opstellen aan de grafiek in een gegeven punt en bewijzen dat deze lijn door de oorsprong gaat. Hier kunnen de leerlingen nogmaals laten zien dat ze de kettingregel goed snappen, en ik ben blij dat ik hier aardig wat aandacht aan heb besteed in de les, want dat is te zien aan het resultaat. Vraag 14 lijkt lastiger en veel leerlingen lopen hierop vast, terwijl het eigenlijk maar een kwestie is van het algebraïsch oplossen van de vergelijking $f(x) = -\frac{11}{9}x$.

Een aantal leerlingen begint de afgeleiden aan elkaar gelijk te stellen, en mijn eerste reactie is om nul punten te geven, ze doen immers niet wat gevraagd wordt. Over deze vraag volgt een verhelderende discussie bij de examenbespreking. Je kunt namelijk óók een bewijs leveren door de afgeleiden aan elkaar gelijk te stellen. Met een redenatie die ver boven de pet van de gemiddelde 5-havoleerling gaat, kun je dan bewijzen dat er inderdaad geen ander snijpunt is in de linkertak. De helling is hier immers minder steil dan -11/9 dus de functies liggen steeds verder uit elkaar als je verder naar links kijkt. Ik vraag me af hoeveel docenten deze methode zelf meteen hadden gevonden, ik niet in ieder geval.

Hoogwerker

De driehoeken staan dan wel niet expliciet getekend in deze opgave, maar de leerlingen weten ze snel te vinden. Er moet een afstand worden berekend in vraag 15 en een hoek in vraag 16, zie figuur 5, en beide zijn standaardtoepassingen van ofwel SOSCASTOA ofwel de cosinusregel. De vragen zijn zelfs prima te beantwoorden zonder de lap tekst te lezen die eraan voorafgaat, vanwege de duidelijke tekeningen. Goed te doen, mooie vraag, prima scores bij mijn leerlingen.



figuur 5

(Co)sinus

Op de achterkant van het examen nog een opgave over goniometrie. Dat onderwerp ontbrak nog in het examen, dus het was te verwachten. We beginnen in vraag 17 met het exact oplossen van een vergelijking, wat meestal prima gaat, maar de vermoeidheid, of tijdsnood, heeft waarschijnlijk toegeslagen, want het resultaat valt me wat tegen. Vraag 18 vergt nog even goed lezen, en goede kennis van zowel de sinus- als cosinusfuncties om de gevraagde functie op te stellen. Een lastige vraag maar wel een mooie afsluiter van het examen.

Conclusies

Net als vorig jaar sloot de inhoud van het examen goed aan bij het programma, en heb ik het gevoel dat ik mijn leerlingen er prima op heb kunnen voorbereiden, ondanks het feit dat er erg veel te doen was in een relatief korte tijd. Ik had namelijk bijna al mijn lessen nodig om het programma af te werken waardoor er weinig tijd was voor specifieke examentraining, maar blijkbaar waren die paar lessen met algemene tips en oefenopgaven genoeg voor deze groep om zelf verder aan de slag te gaan met de voorbereiding op het eindexamen. Er was eigenlijk maar één ding dat ik miste in dit examen, en dat was een WDA voor veel punten, zoals de beruchte 'bewijsopgave' van vorig jaar, maar voor de leerlingen was dit gunstig. Ze blijken hun prestaties inderdaad goed te hebben ingeschat en hebben het examen in zijn geheel gemiddeld goed gemaakt. Ik gokte op een N-term van 1 of zelfs iets eronder, maar met N = 1,2 komen de cijfers nog hoger uit dan ik verwachtte. Een aantal leerlingen heeft bijna twee volle punten hoger gescoord op het centraal examen dan op het schoolexamen, maar helaas gaat het bij een aantal ook de andere kant op. Gemiddeld kom ik alsnog uit op 0,9 punt hoger en heeft bijna iedereen een voldoende eindcijfer gehaald. Daar ben ik zeer tevreden over en ja ook wel trots. We hebben het samen super goed gedaan!

Over de auteur

Femke van den Berg-Douma is docent wiskunde op het Anna van Rijn College te Nieuwegein en ze is lid van de werkgroep havo-vwo van de NVvW.
E-mailadres: *f.douma@annavanrijn.nl*

MEDEDELINGEN

SYMPOSIUM 'REKEN JE RIJK'



Op zaterdag 13 oktober organiseert de werkgroep Geschiedenis van de NVvW een symposium. Over hoe en waarom er vroeger gerekend werd: aan de decimalen van pi, in rekenboeken, maar vooral ook bij praktische handelsproblemen, salarissen en verzekeringen.
Het symposium vindt plaats in Utrecht, reserveer de datum vast!

25E NATIONALE WISKUNDEDAGEN





Als wiskundeleraar moet je van tijd tot tijd nieuwe ideeën op kunnen doen en creatief en actief met je vak bezig zijn. Dat kan door te luisteren naar een goed verhaal, door actief mee te doen in werkgroepen en door met collega's van gedachten te wisselen.
De NWD biedt die gelegenheid en is bedoeld voor alle wiskundeleraren die les geven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype. Het Freudenthal Instituut organiseert de NWD voor de 25e keer!

Inschrijving

De Nationale Wiskunde Dagen 2019 worden gehouden op vrijdag 1 en zaterdag 2 februari 2019.
De inschrijving gaat open in september, houdt onze site en de WiskundE-brief in de gaten voor de exacte details.

Kosten

Reiskosten zijn voor eigen rekening. Inschrijving is alleen mogelijk voor de hele conferentie. Deelname aan de NWD kan door de school betaald worden uit nascholingsgelden.
Deelname NWD met een éénpersoonskamer: € 440,00.
Deelname NWD met een tweepersoonskamer: € 395,00.

Locatie

Hotel NH Noordwijk Conference Centre Leeuwenhorst
Langelaan 3, Noordwijkerhout

EXAMEN VWO WISKUNDE A

Het eerste wiskunde A-examen nieuwe stijl en de vraag is natuurlijk of de aangekondigde denkactiviteiten hun plaats hebben gekregen. Marcel Daems vindt deze eerste test geslaagd, zoals blijkt uit deze recensie.

Inleiding

Dit jaar werd het nieuwe examenprogramma vwo wiskunde A landelijk geëxamineerd. In voorgaande jaren is er volop geëxperimenteerd en zijn er verschillende pilot-examens afgenomen. De pilot-examens in het eerste tijdvak van 2013 t/m 2017 bestonden allemaal uit 21 vragen, met gemiddeld 82,2 punt en een N-term van minimaal 1,5. Tweemaal (2014 en 2017) werd zelfs een N-term van 2,1 vastgesteld. Hoe zou het dit jaar uitpakken? De afgelopen drie jaar is met het nieuwe programma gewerkt en nu volgde de eerste echte test. Heeft de lesmethode inderdaad alles aangeboden? Biedt de methode een goede voorbereiding op het centrale examen? Komt het niveau van de opgaven van het examen overeen met het niveau van de opgaven in de voorbereiding?
De eerste indruk van het examen is dat het lijkt op dat van vorig jaar. Er zijn 21 vragen, het is erg tekstrijk en ook nu is er weer een afsluitende onderzoeksvraag van 7 punten. Het totaal aantal punten dat een leerling kan halen is 78. Zo laag was het de laatste zes examens in het eerste tijdvak niet.
Na het examen te hebben gemaakt, meen ik dat het voor het grootste deel zeker te doen is, dat het aansluit bij actuele thema's en dat de meeste vaardigheden aan bod zijn gekomen. Ook de denkactiviteiten, die ik in de onderzoeksvragen meen te herkennen. De vijf onderzoeksvragen, behalve de laatste, laten vrij weinig ruimte toe voor een eigenzinnige aanpak. Nu vind ik het moeilijk om een geschikte opgave te bedenken waarmee je denkactiviteiten kunt testen. En dat zal op een examen niet anders zijn.

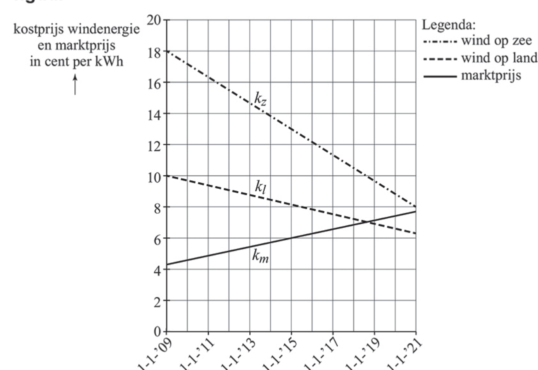
Windenergie

De eerste vragen gaan over windenergie, een actueel thema, zie figuur 1. De leerlingen mogen gaan rekenen met duurzaamheid. Ze gaan aan de slag met lineaire verbanden en uiteindelijk met een kwadratisch verband. Eerst een lineair verband opstellen voor de kosten, k_z, van windenergie gewonnen op zee, daarna uitrekenen wanneer de kosten van energie opgewekt uit kolencentrales tweemaal zo hoog zijn als de kosten van windenergie opgewekt op land en ten slotte een kwadratisch verband geven voor de totale kosten van door kolencentrales gemaakte energie. De totale kosten worden berekend door de prijs, g_m, te vermenigvuldigen met de totale hoeveelheid energie, *TE*. Al met al was dit een mooie, eigenlijk te makkelijke, binnenkomer en zullen de leerlingen zeker niet overvraagd zijn. De laatste vraag van dit blok had wat uitdagender kunnen zijn door te vragen naar de maximale totale kosten zonder aan te geven dat het om een kwadratisch verband gaat.

Windenergie

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie de onderstaande figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).

figuur



De formule voor de marktprijs k_m luidt:

$$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$$

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land luidt:

$$k_l = -0,31 \cdot t + 10,0$$

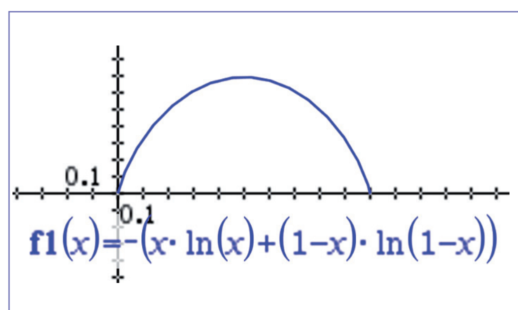
Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

figuur 1

Shannon-index

De Shannon-index is een maat voor de diversiteit van een populatie dieren of planten. De formule met een natuurlijke logaritme waarmee deze index berekend kan worden is: $H = -(p_1 \cdot \ln(p_1) + p_2 \cdot \ln(p_2))$. De verschillende soorten worden aangegeven met p_1 of p_2. In deze opgave wordt alleen naar populaties gekeken met twee soorten. Omdat het maar om twee soorten gaat, zijn de vragen hierbij niet echt uitdagend en wordt er een moeilijke formule gegeven voor een eenvoudig probleem.

Vraag 4 is de eerste onderzoeksvraag van het examen. Gegeven is dat bos *A* voor 70% uit eiken bestaat en voor 30% uit beuken, voor bos *B* gelden de percentagens 90% eiken en 10% beuken. De opdracht is te onderzoeken welk bos de grootste Shannon-index heeft. Eigenlijk komt het erop neer de getallen in te vullen en de index te berekenen. Niet verrassend dat dit bos *A* is.
Ook vraag 5 is een onderzoeksvraag. Omdat aangegeven wordt hoe dit gedaan moet worden is het onderzoek vrij beperkt. Bovendien krijgen de leerlingen een aangepaste formule voor twee soorten met slechts één variabele. Namelijk als het aandeel van de ene soort aangegeven wordt met p, dan is het aandeel van de andere soort $1 - p$ en wordt de formule: $H = -(p \cdot \ln(p) + (1 - p) \cdot \ln(1 - p))$. De opdracht is te onderzoeken met de grafische rekenmachine tot welke waarde de index nadert als een soort tot nul nadert, zie figuur 2.



figuur 2

Een schets geeft direct aan dat de index nul wordt. In het geval dat er maar twee soorten zijn is het niet verrassend dat de diversiteit nul wordt als een van de twee soorten verdwijnt.
Vraag 6 gaat over het maximum van de Shannon-index. De afgeleide wordt al gegeven, dus ook hier vraagt het examen niet veel van de leerlingen. Bovendien kun je zonder te rekenen al zeggen dat de diversiteit van een populatie het grootst is als beide soorten een aandeel van 50% hebben. Als een soort een aandeel van meer dan 50% heeft, dan is zo'n populatie meteen minder divers. Het antwoord op de vraag is inderdaad 50%.
Deze opgave had echt uitdagender gekund door de formule in een andere vorm te presenteren en deze vervolgens met behulp van de rekenregels voor logaritmen in de juiste vorm te laten schrijven. Het bepalen van de afgeleide van een logaritmische functie is onderdeel van het examenprogramma. Dat had bij deze laatste vraag bij de Shannon-index niet misstaan.

Bitcoins

Een actueel onderwerp en een mooi voorbeeld van een toepassing waaruit blijkt dat het vak wiskunde A zeker een toegevoegde waarde heeft. Deze opgave geeft wat meer inzicht in de wereld van het digitale geld, al zullen de gegevens in deze opgaven een aanpassing van de werkelijkheid zijn. Het aantal bitcoins dat in omloop komt, hangt af van het oplossen van wiskundeproblemen.
De aanname is dat iedere 10 minuten een computer ergens ter wereld een probleem oplost. De eigenaar van deze computer krijgt dan een hoeveelheid bitcoins. In deze set vragen komen lineaire en exponentiële vergelijkingen aan bod. Een te verwachten combinatie.
Voor vraag 7 moeten de leerlingen uitrekenen wanneer het aantal bitcoins boven de 18 miljoen uitkomt. Gegeven is dat op 1 januari de hoeveelheid bitcoins 12,2 miljoen is en per 10 minuten met 25 bitcoins groeit.
De oplossing is een lineair verband waarmee uitgerekend kan worden wanneer de hoeveelheid 18 miljoen is. Hierbij zit een spreekwoordelijk addertje onder het gras. Moet je als leerling wel of geen rekening houden met een schrikkeljaar? In het eindantwoord maakt het in dit geval niet uit. Een leerling die hier wel rekening mee houdt, kan zichzelf wel extra rekenwerk bezorgen. Opmerkelijk is dat in het correctievoorschrift staat dat geen punten in mindering gebracht mogen worden als iemand hier wel rekening mee houdt, zie figuur 3.

Bitcoins

7 **maximumscore 3**
- Per dag zijn er $24 \cdot 6 \cdot 25 = 3600$ bitcoins te verdienen 1
- Het duurt dus nog $\frac{5800000}{3600}$ $(= 1611,...)$ dagen 1
- Het antwoord: (in het jaar) 2018 1

of

- Per jaar komen er $365 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 25 = 1,314$ miljoen bitcoins bij 1
- De vergelijking $12,2 + 1,314x = 18$ moet worden opgelost 1
- De oplossing $x = 4,4...$, dus (in het jaar) 2018 1

Opmerking
Als een kandidaat met een jaarlengte van 365,25 dagen rekent, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

figuur 3

Het zou eigenlijk andersom moeten zijn: als een kandidaat geen rekening houdt met een schrikkeljaar, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Het lineaire model is echter niet de werkelijkheid. Die is beter weer te geven in een exponentieel model. De beloning voor het oplossen van de problemen halveert per periode van 4 jaar. Eerst was de beloning per oplossing 50 bitcoins, daarna 25 enzovoorts. Vraag 8 en 9 gaan over exponentiële verbanden die hierbij horen. Eén vraag laat nagaan wanneer de hoeveelheid bitcoins minder dan 1 bitcoin per oplossing is. Het antwoord is 5,6... . Een leerling moet wel bedenken dat het om periodes gaat van 4 jaar. Dus na 6 periodes ofwel 24 jaar. Voor vraag 9 moet met een redenering nagegaan worden wat de grenswaarde is van de hoeveelheid bitcoins. Het model voor het aantal bitcoins in omloop is: $C = 21 - 21 \cdot 0,5^{0,25t}$.

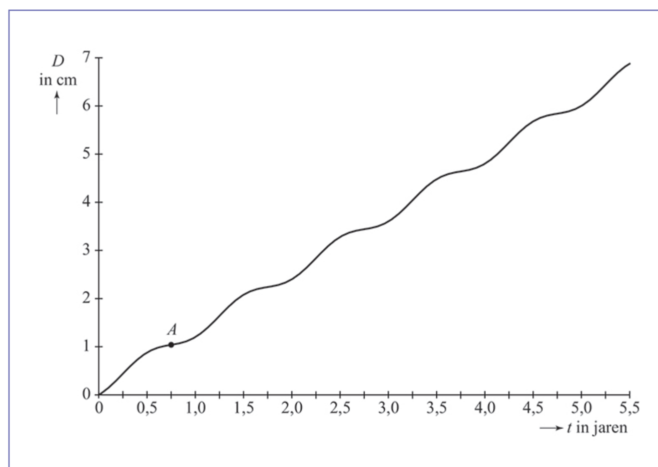
Behalve de uitbetaling per oplossing verandert ook de moeilijkheidsgraad van de wiskundeproblemen.

De formule die hierbij hoort is: $D = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533t}$.

Een formule met een *e*-macht. De leerling moet deze formule differentiëren en beredeneren dat de grafiek toenemend stijgend is. Voor deze opdracht zijn 4 punten te verdienen waarvan twee voor het eerste bolletje in het correctievoorschrift. Gelukkig staat er een opmerking bij hoe de examinator met de verdeling van deze 2 punten moet omgaan als de leerling de vraag niet helemaal goed heeft opgelost. De gebruikelijke discussie over de ondeelbaarheid van de punten is dit jaar dan ook achterwege gebleven. Deze toevoeging maakt de correctie duidelijker en eerlijker. Een leerling is op dit punt niet meer afhankelijk van de interpretatie van de examinator of de gecommitteerde. En dat verhoogt de kwaliteit van het uiteindelijke cijfer. Bij twee andere vragen waar 2 punten voor een bolletje te verdienen zijn, staat geen opmerking. Waarschijnlijk omdat het bij die vragen gaat om een alternatieve oplossing.

Jaarringen

Dat een boom jaarringen heeft was mij bekend, maar een sinusoïde voor de groeisnelheid had ik hier niet zo snel bij bedacht. Zo'n opgave vind ik dan ook meteen leuk. Vraag 12 en 13 zijn prima te doen. Bij vraag 12 moeten de parameters van een sinusoïde bepaald worden en dat is standaardwerk. Voor vraag 13 is een formule voor de diameter van een grove den gegeven:
$D = 1{,}2t + 0{,}14 + 0{,}14\sin(2\pi(t - 0{,}25))$.
Behalve de formule krijgen de leerlingen ook de bijbehorende grafiek te zien. De vraag is vervolgens uit te rekenen wanneer de diameter 5 cm is. Ook hier is niet veel bijzonders aan de hand. Het vervolg vraagt nauwelijks meer inzicht. Bij de formule van *D* hoort ook een grafiek, zie figuur 4, waarin te zien is dat de sinusoïde om een lijn schommelt.

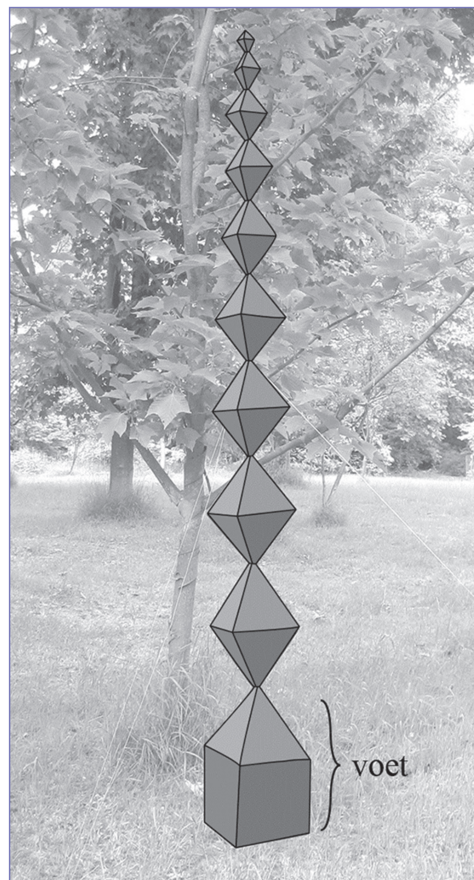


figuur 4

De formule van deze lijn is: $T = 1{,}2t + 0{,}14$. De leerling moet onderzoeken hoe groot het maximale verschil is tussen de formule voor *D* en *T*.

Al met al is deze opgave over jaarringen toch minder uitdagend dan ik aanvankelijk dacht. De laatste twee opgaven zorgen daar ook niet voor. Eerst moeten de leerlingen uitrekenen hoeveel procent van de groei het eerste half jaar plaatsvindt. Hierbij moeten de leerlingen er rekening mee houden dat ze geen formule voor de groei hebben, maar de groei moeten bepalen uit de formule voor de diameter. De afsluitende opdracht is met de grafische rekenmachine nagaan waar volgens de formule voor *D* de groeisnelheid minimaal is en wat die groeisnelheid dan is. Omdat in de grafiek al is aangeven op welk moment dat in ieder geval is, maakt dit het tot een invuloefening. Hier mag van leerlingen meer gevraagd worden. Bijvoorbeeld door te vragen wanneer de groeisnelheid de helft is van de maximale snelheid.

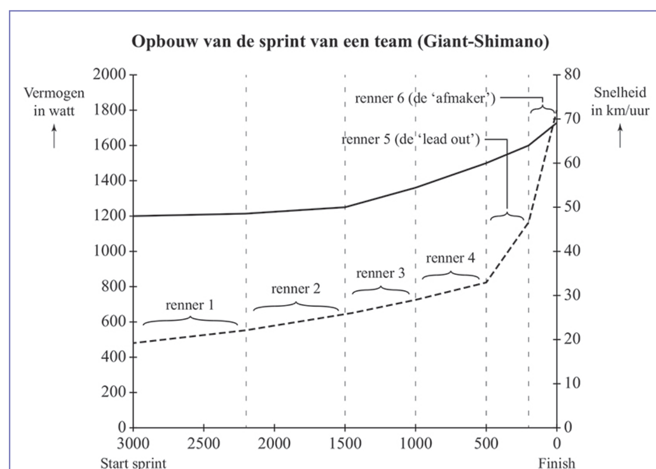
Toren van achtvlakken



figuur 5

Nu een combinatie van kunst en wiskunde. In dit geval is het ruimtelijk inzicht gecombineerd met combinatoriek, rekenkundige en meetkundige rijen. De toren bestaat uit een kubus en een half regelmatig achtvlak als voet en daarop negen regelmatige achtvlakken die steeds kleiner worden, zie figuur 5. De eerste opdracht is na te gaan op

hoeveel manieren de negen achtvlakken geverfd kunnen worden met drie verschillende kleuren waarbij iedere kleur ook voor drie achtvlakken gebruikt wordt. De ribben van de regelmatige achtvlakken worden steeds kleiner. Dat kan op exponentiële of lineaire wijze benaderd worden. Uitgaande van een exponentieel verband moet de leerling nagaan wat de vermenigvuldigingsfactor is. Voor de benadering door middel van het lineaire verband - het examen spreekt hier van een rekenkundige rij - krijgen de leerlingen een formule die ze moeten afleiden. Opgave 20 vraagt wel wat meer denkwerk. De lengte van een ribbe van ieder achtvlak kan nu op twee manieren benaderd worden. De vraag is bij welk vlak het verschil tussen beide benaderingen het grootst is. Een niet al te moeilijke vraag met een goede laatste opdracht.



figuur 6

Sprinttrein

Als afsluiter een onderzoeksvraag van 7 punten. Dat is bijna 9% van het totaal en daarmee telt deze vraag te zwaar mee. Ditmaal gaat het om een verschijnsel dat vaak bij een wielerwedstrijd voorkomt. Bij een zogenaamde sprinttrein is het doel een steeds hogere snelheid te ontwikkelen door elkaar slim af te lossen om uiteindelijk één renner in een gunstige positie met een hoge snelheid te plaatsen zodat deze de wedstrijd kan winnen. Ik vermoed dat dit onderwerp veel leerlingen niet zo veel zegt. Bovendien is in deze opgave sprake van vermogen en arbeid; abstracte begrippen uit de natuurkunde. Daarentegen is er voldoende informatie gegeven en gaat het er natuurlijk om of een leerling een grafiek kan interpreteren en met één of meer gegeven definities uit deze grafiek de juiste informatie kan halen om een onderzoek uit te voeren. In dit geval is de vraag welke renner de meeste arbeid verricht. Of iets preciezer: levert de eerste renner of de laatste renner de meeste arbeid of maakt het niet uit?

In figuur 6 is af te lezen dat de verschillende renners verschillende afstanden op kop rijden en dat doen met verschillende snelheden en vermogens. (Wat vermogen is wordt niet verder verduidelijkt. Wiskundig gezien doet dat er ook niet zo toe, het is een variabele van een bepaalde soort.) Daarnaast is de definitie van arbeid gegeven:
De arbeid die een renner levert is gelijk aan het vermogen vermenigvuldigd met de tijdsduur in seconden.
Een leerling moet dus de snelheid van de bewuste renners omrekenen van km/uur naar m/s, een schatting geven van de afgelegde afstand om zo de tijdsduur te bepalen. Ook moet de leerling het vermogen van een renner bepalen om zo de arbeid uit te kunnen rekenen. Een probleem is dat de snelheid en ook het vermogen bij iedere renner steeds groter wordt. Dus wat is de snelheid en het vermogen van een renner? Hier moet de leerling dus iets verzinnen om er toch mee aan de slag te kunnen. Gelukkig bestaat de grafiek van zowel de snelheid als het vermogen uit lijnstukjes en is de gemiddelde waarde een uitstekende keuze. Zelf heb ik het voor alle renners berekend en kwam ik tot de conclusie dat de eerste renner meer arbeid verricht dan de laatste.
Deze opgave heeft mij wel veel tijd gekost. Dat komt vooral door het zo goed mogelijk willen aflezen van de verschillende waarden van de snelheden en vermogens. Een nauwkeurige schaalverdeling zou veel schelen.
De verhouding tussen de tijd die deze opgave kost en de punten die het oplevert is scheef. De wiskunde die hierachter zit is echter niet zo moeilijk. Dat er verschillende stappen vereist zijn en dat leerlingen abstracte begrippen moeten hanteren maken dit wel een goede onderzoeksopdracht voor 6 vwo-niveau.

Tot slot

Het eerste landelijk examen van het nieuwe programma is een feit. De onderwerpen waren actueel en daarmee verdienen de makers zeker een compliment. Een ander positief punt vind ik de extra toelichting in het correctievoorschrift bij bolletjes met twee punten. Hier en daar ontbrak de uitdaging en niet alle vijf onderzoeksvragen vergden intensieve denkactiviteit. Daarmee is het examen aan de lichte kant. Dat blijkt ook uit de N-term van 0,6. Toch bevat het examen genoeg om de verschillende vaardigheden te testen en vormt het geheel een mooie balans. Deze eerste echte test durf ik wel geslaagd te noemen.

Over de auteur

Marcel Daems is docent wiskunde aan Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag.
E-mailadres: *da@gymnasium-sorghvliet.nl*

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?

Ger Limpens

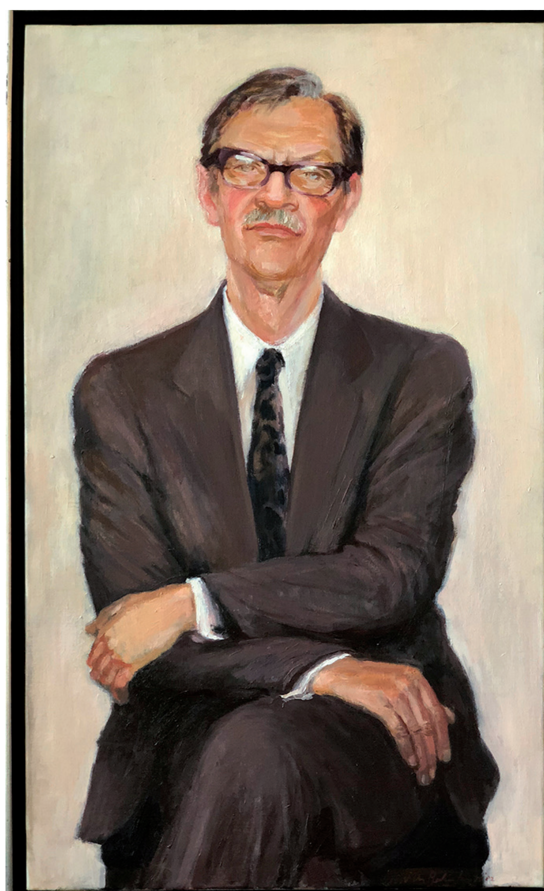
C¿to bestaat 50 jaar. Dat vieren we door Cito deze jaargang in de schijnwerpers te zetten, zodat we zien dat Cito méér is dan alleen de bron van onze examens. Ger Limpens neemt het eerste deel voor zijn rekening.



Inleiding

Geen idee of er veel fraaie getaltheoretische unieke beschrijvingen van 2018 zijn te geven. Duidelijk is in elk geval dat 2018 geen priemgetal noch een Catalangetal dan wel een getal uit de reeks van Fibonacci is. Maar misschien is 2018 wel kampioen als jaartal qua jubilea. Dit jaar mochten we al diverse meldingen in de media aantreffen waarbij gememoreerd werd dat er 50 jaar geleden van alles gebeurde dat vandaag nog de moeite waard is van het herinneren. Denk aan de studentenoproeren, de moorden op Robert Kennedy en Martin Luther King, de Praagse Lente en Black Panther tijdens de Olympische Spelen in Mexico. Dichterbij herinnert een enkeling zich wellicht de start van de nog steeds functionerende poptempel Paradiso, de eerste kleurentelevisie-uitzendingen en de overwinning van Jan Janssen in de Tour. Aan deze historische bloemlezing mag natuurlijk ook de oprichting van Cito (toen nog het C.I.T.O, Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling) toegevoegd worden...
In dit artikel, het eerste uit een reeks van zeven, proberen we een beeld te schetsen van de situatie in die beginjaren en het tijdsgewricht waarin kennelijk de behoefte aan een dergelijk instituut zodanig gevoeld werd dat tot de oprichting ervan gekomen kon worden. En later dit cursusjaar mag je van ons nog bijdragen verwachten waarbij aandacht besteed zal worden aan de volgende thema's:

- Een historisch overzicht van de ontwikkeling van de examens wiskunde van begin jaren '70 tot heden.
- Cito in de toekomst met specifieke aandacht voor digitale ontwikkelingen, meer in het bijzonder de recente digitale ontwikkelingen binnen de wiskunde-examens vmbo-CBT en wellicht ook een terugblik naar de examens waarbij de computer gebruikt werd in de jaren 0 van deze eeuw (compex).
- Cito en de psychometrie: een op een wiskunde-examen toegesneden handleiding hoe je een toets- en itemanalyse (TIA) met gegevens over moeilijkheid en betrouwbaarheid van de toetsvragen moet lezen, gecombineerd met aandacht voor de enkele jaren geleden ontwikkelde exceltool. Cito en de psychometrie: interview met een of meer medewerkers van de Cito-afdeling Psychometrisch Onderzoek (PO) met als focus 'examens wiskunde'.
- Cito in het buitenland: aan de hand van diverse internationale Cito-projecten een beeld schetsen van Cito's werkzaamheden in het buitenland.
- De 'Centrale Eindtoets', in de volksmond vaak nog genoemd de 'Citotoets' van het basisonderwijs.



figuur 1 A.D. de Groot

A.D. de Groot

Wie Cito zegt, zegt ook A.D. de Groot. Adrianus Dingeman de Groot (1914-2006) studeerde eerst wiskunde en vervolgens psychologie aan de UvA. In 1946 promoveerde hij in de wis- en natuurkunde met het proefschrift *Thought and Choice in Chess* waar hij internationaal bekend mee werd. Na een korte periode als wiskundedocent en bedrijfspsycholoog ging hij in 1950 aan de slag als hoogleraar aan de UvA. Eind jaren '50 maakte hij een studiereis naar de VS en bezocht daarbij ETS (Educational Testing Service). Die studiereis inspireerde hem tot het schrijven van een voorstel voor de oprichting van een Nederlandse variant van ETS. In dat voorstel zat, zo zei hij zelf in een interview vele jaren later, al 'de helft van de blueprint voor het latere Cito'. In 1957 had hij ook al aan de basis gestaan van de oprichting van het RITP (Research Instituut voor Toegepaste Psychologie). Dit zou men wel kunnen zien als de eerste aanzet tot toetsontwikkeling op landelijk niveau. Het eerste RITP-project kwam voort uit een aanvraag van een commissie die zich bezighield met de, in de ogen van die commissie, nodig te veranderen didactiek van het wiskundeonderwijs. De Groot was van mening dat een dergelijk probleem slechts onderzocht kon worden door het objectief meten van leerresultaten en hij wist zowel de commissie als het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen van de juistheid van dat standpunt te overtuigen.

Tijdgeest

Begin jaren '60 was de aansluitingsproblematiek van (toen nog) zesdeklassers van de lagere school naar het vhmo onderwerp van politieke discussie. Onder het vhmo vielen voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs, een verzamelterm van diverse vormen van voortgezet en middelbaar onderwijs in de jaren voor 1968, het jaar dat de Mammoetwet in werking trad. Meer in detail waren dat gymnasium, lyceum, hbs, mms en handelsdagschool/hbs-A. Het werd niet meer vanzelfsprekend geacht dat de zoon van de timmerman ook maar weer naar de ambachtsschool zou moeten gaan en er werd gezocht naar methodes om op grond van individuele kwaliteiten door te verwijzen. Op landelijk niveau werd besloten dat er, naast het advies van het schoolhoofd, een ander, zo objectief mogelijk, gegeven nodig was om tot een betere doorverwijzing naar het vervolgonderwijs te komen. Het RITP sprong daarop in en ontwierp, voor Amsterdamse scholen, de zogeheten schoolvorderingentest.
In diezelfde periode werd ook de aanzet gegeven, mede door De Groot, voor de oprichting (in 1965) van de Stichting Voor Onderzoek van het onderwijs (SVO). Een jaar na die oprichting vroeg de Minister van Onderwijs en Wetenschappen aan SVO advies over de mogelijkheden voor de oprichting van een centraal toetsingsinstituut.
In datzelfde jaar verscheen overigens ook het boek *vijven en zessen* (het ontbreken van hoofdletters in de titel past ongetwijfeld in de tijdgeest) van De Groot.



figuur 2 Vijven en zessen

Daarin wijst hij op, zoals hij dat zelf in zijn voorwoord noemt, de 'vele kwaliteiten en vele fouten' van het onderwijssysteem in Nederland. Hij beschrijft 'de willekeurige, ondemocratische en inefficiënte' wijze waarop in het Nederlandse onderwijssysteem van die tijd met behulp van cijfers - vijven en zessen - leerlingen worden beoordeeld en geselecteerd. Het SVO-advies leidde in 1967 tot de publicatie *Nota Oprichting Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (Cito)*, gevolgd door de installatie van een (voorlopig) instituutsbestuur. Het waren, ook in onderwijsland, enerverende jaren: in 1968 werd, zoals al gemeld, niet alleen de Mammoetwet van kracht maar vond ook de officiële start van Cito plaats (met als directeur overigens niet De Groot maar voormalig rector J.W. Solberg). Het instituut 'heeft tot doel de objectieve beoordeling van leerlingen in het onderwijs te bevorderen', zo werd het in officiële documenten geformuleerd. Daartoe dienden school- en studietoetsen ontwikkeld te worden. In de beginjaren waren dat voornamelijk toetsen die bij eindpunten en overgangsmomenten werden afgenomen. In de jaren daarna zijn er steeds meer toetsen en andere evaluatie-instrumenten ontwikkeld die gebruikt kunnen worden tijdens het onderwijsleerproces.

Groei Cito

Gevolg van die toename in diversiteit is uiteraard dat ook het aantal medewerkers in de loop van de jaren fors steeg. In 1969 telde het Cito 21 medewerkers. In 1982 waren dat er al 234 en in 2018 circa 500 mensen. De structuur van Cito als organisatie is in al die jaren eveneens behoorlijk veranderd. In 1968 opgericht als overheidsstichting, werd Cito in 1987 een publiekrechtelijke instelling, vallend onder de Mammoetwet of, zoals deze officieel heette, de Wet op de Onderwijsverzorging (WOV). In 1999, toen de WOV vervangen werd door de

wet Subsidiëring Landelijke Onderwijsondersteunende Activiteiten (SLOA), werd Cito geprivatiseerd. Daarbij ontstond een hybride organisatie van Stichting Cito, met een, wettelijk omschreven, publieksrechtelijke taak en Cito B.V. als de representant voor het ontwikkelen en vermarkten van commerciële producten voor onderwijs en bedrijfsleven in binnen- en buitenland.

Examens

Hoewel Cito dus al in 1968 werd opgericht, is het niet zo dat Cito vanaf dat moment ook de organisatie is geweest die zich bezig heeft gehouden met de ontwikkeling van alle centrale eindexamens. In de vroege jaren zeventig van de vorige eeuw werden er voor het middelbaar onderwijs 'slechts' alleen die examens door Cito geproduceerd die enkel uit meerkeuzevragen bestonden.

Wiskunde II – MAVO 3 (1½ uur)

Bij elk van de volgende opgaven staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters a, b, c en d. Eén van de antwoorden is goed. Teken een kringetje om de letter van het goede antwoord.

1. Bij spiegeling in de X-as gevolgd door spiegeling in de Y-as is het beeld van (p, q)

   a (p, q) b $(p, -q)$ c $(-p, q)$ d $(-p, -q)$

2. $x^2 - x - 2 = 0$ is gelijkwaardig met

   a $x = -2$ of $x = -1$ b $x = -1$ of $x = 2$ c $x = 1$ of $x = -2$ d $x = 2$ of $x = 1$

3. $V = \{ (x, y) \mid 3x + 2y = 7 \}$ en $W = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 7 \}$.
   Als $V \cap W = \{ (p, q) \}$, dan geldt

   a $p < 0$ en $q < 0$ b $p < 0$ en $q > 0$ c $p > 0$ en $q < 0$ d $p > 0$ en $q > 0$

figuur 3 Fragment van multiple choice examen wiskunde mavo 1971

De examens voor de andere wiskundevakken die, ook in die jaren, uit open vragen bestonden, werden gemaakt door examencommissies (in opdracht van het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen) die los van Cito stonden. Cito had een adviserende taak en medewerkers van Cito woonden vergaderingen van deze commissies dus 'slechts' in een adviseursfunctie bij. Er zijn (oud-) Cito-collega's die zich nog weten te herinneren dat er momenten waren dat ze zich slechts 'gedoogd' voelden. En net zoals vandaag de dag werd Cito ook toen al wel op de korrel genomen door docenten wiskunde die bereid waren stellingen in te nemen die haaks stonden op de adviezen die door Cito werden uitgebracht. Aardig in dat verband is wellicht het volgende citaat uit *Euclides* nr. 7 van de jaargang 1972-1973, gericht aan *Euclides*-redactielid Van Hiele, waarbij het al dan niet gebruiken van de (nog steeds regelmatig terugkerende) 'ezelsbrug' Mijnheer Van Dalen Wacht Op Antwoord onderwerp van discussie is:

Geachte Heer Van Hiele,

In vervolg op ons telefoongesprek wil ik U nogmaals schriftelijk de kwestie voorleggen. Het gaat over een publicatie van het Centraal instituut voor toetsontwikkeling CITO Arnhem no 21, oktober 1972.
Op blz. 29 van genoemde publicatie komt het volgende voor: 'vermenigvuldigen en delen van links naar rechts; vermenigvuldigen noch delen hebben voorrang op elkaar.' Aan het einde van de eerste kolom van dezelfde bladzijde: 'Bovenstaande regels worden in het onderwijs nog niet algemeen aanvaard. Veel scholen gebruiken nog "Mijnheer Van Dalen". In verband hiermee heeft de commissie besloten geen opgaven op te nemen die het kunnen toepassen van de regels toetsen.' Mijn vraag is of inderdaad in het onderwijs deze genoemde regel al wordt aanvaard? En in welk onderwijs? Gaat van deze publicatie de suggestie uit om genoemde regel te gaan toepassen? Is het een doelstelling van het Cito suggesties op dit gebied te doen? Wat is dan de rol van Wiskobas en de rol van de Commissie Modernisering Leerplan wiskunde vwo-havo-mavo? Nu is dit misschien een detail, de tijd ontbreekt mij om na te gaan in hoeverre in het geheel het Cito stuurt i.p.v. toetst. Het zou interessant zijn om na te gaan of we naast alles er nog een 'sluipende' schooladviesdienst of iets dergelijks bij hebben gekregen.
In de hoop de kwestie naar genoegen onder Uw aandacht te hebben gebracht, met vriendelijke groeten en de meeste hoogachting,

8 januari 1973, G.J. Leus, directeur R.K. Mavoschool, Winterswijk

In 1977 startte Cito met het project 'Open Vragen' dat ten doel had de examencommissies bij te staan bij de verbetering van de examenopgaven in open-vraagvorm.
Dat leidde er uiteindelijk toe dat werkzaamheden en verantwoordelijkheden rond de centrale examens in de loop van de jaren behoorlijk veranderd zijn.

Vandaag

Tegenwoordig is de opdrachtgever voor de productie van de centrale examens het College voor Toetsen en Examens (CvTE). CvTE is een zelfstandig bestuursorgaan dat namens de overheid verantwoordelijk is voor kwaliteit en niveau van de centrale examens en toetsen in Nederland. Hierbij wordt onder meer samengewerkt met Cito, waarbij Cito de ontwikkeling en productie van onder andere de centrale examens voor het middelbaar onderwijs voor haar rekening neemt. In de huidige structuur wordt elk centraal examen ontwikkeld door een vakinhoudelijke[1] Cito-toetsdeskundige samen met een constructiegroep, bestaande uit ervaren vakdocenten met recente onderwijs-

ervaring in het betreffende examenvak. Een expertgroep van CvTE beoordeelt het examen en stelt het uiteindelijk vast. Simultaan wordt ook een correctiemodel bij dat examen ontwikkeld. Indien mogelijk worden opgaven en correctiemodel empirisch getest en uiteindelijk daadwerkelijk als examen ingezet. De analyse van de landelijk verkregen resultaten wordt door Cito verricht. Die analyse wordt door CvTE gebruikt om te komen tot een normering (omzetting van scores naar cijfers) van het betreffende examen. Op deze wijze komen we weer uit bij de titel van De Groots boek uit 1966...

Bronnen

- Luijten, T. (1993) *Het C¿to tussen Schiermonnikoog & Maastricht.* Ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van Cito.
- Groot, A.D. de (1966). *vijven en zessen.* Groningen: Wolters.
- Weeda, W.C., Wijnen, W.H.F.W. & Solberg, J.W. (1983). *Examens in discussie. Een bundel opstellen voor J.W. Solberg*. Groningen: Noordhoff.
- Alberts, G. & Zwaneveld, B. (2001). 'Alle dagen eindexamen. Interview met Henk Schuring.' *Nieuw Archief voor Wiskunde*, nr 3, pp 262-265..
- Jong, A.J.M. de & Schuring, H.N. (1980). De werking van correctievoorschriften bij het CSE HAVO 1979-II. *Euclides, 55*(10), pp. 417-426.
- G.J. Leus (1973). 'Mijnheer van Dalen'. Ingezonden brief. *Euclides, 48*(7).
- Wikipedia, diverse lemma's.

Noot

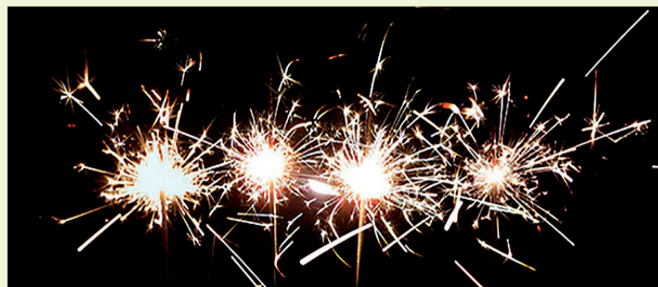
[1] Dat de toetsdeskundige ook vakinhoudelijk deskundig is, geldt bij de avo-vakken.
Bij beroepsgerichte vakken kan het zijn dat de vakdeskundigheid vooral door constructiegroepsleden wordt ingebracht.

Over de auteur

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@cito.n*

UIT DE PRAKTIJK

Hugo Duivesteijn



De laatste lesweek voor de kerstvakantie. Ik ben klaar voor de laatste wiskundeles aan mijn 4-techniekklas vmbo-basis met 23 jongens en één meisje. Het onderwerp op het programma is sinus en cosinus en de lesplanning staat zoals gebruikelijk al op het bord. Eén voor één komen ze binnen. De klas is een beetje druk door de gymles ervoor en met het hoofd ook al bij de naderende vakantie. Toch gaan ze zitten en komen de wiskundeboeken op tafel en de juiste pagina's worden opengelegd. Dan opeens, voor ik ben begonnen met de les, spreekt Lorenzo me aan, hij zit op de tweede rij en zegt: 'Meneer, meneer, ik heb zó'n buis' en hij maakt een cirkel met duimen en wijsvingers. 'Ok', zeg ik, niet wetend wat hij daarmee wil. Ik kijk hem vragend aan. 'Hoeveel sterretjes passen daar in? Ik wil een fakkel maken?', zegt hij. Meteen flitsen er twee scenario's door me heen. Ik kan natuurlijk zeggen dat het een slecht idee is en dat hij dat niet moet doen. Maar ik ken mijn pappenheimers, ze proberen het toch. Of ik ga met hem op onderzoek uit. 'Dat weet ik niet Lorenzo, maar we kunnen het wel berekenen. Wat hebben we daar voor nodig?' 'Oppervlakte van de cirkel!' komt er uit het lokaal. We hebben de volle aandacht voor dit probleem. Samen doorlopen we alle stappen, waarbij we de diameter van sterretjes afschatten en ook daarvan de oppervlakte uitrekenen. Uiteindelijk maken we een schoolbord en 24 wiskundeschriften vol met berekeningen en een ruwe schatting hoeveel sterretjes het moeten zijn, iets meer dan duizend. Geen sinus en cosinus, maar een hele les over oppervlakte en omtrek van cirkels. Na de vakantie zie ik de klas weer. 'En hadden we gelijk?' vraag ik aan Lorenzo. Een grote grijns verschijnt op zijn gezicht. 'Zeker meneer, wacht, kijk hier.' En er volgt een filmpje van een fakkel met sterretjes. Hij had 21 pakjes van 50 stuks gebruikt, dus we hadden gelijk. Nu maar eens naar die cosinus kijken.

Over de auteur

Hugo Duivesteijn is sinds drie jaar docent wiskunde in het vmbo. Vanaf dit schooljaar werkt hij op Werkplaats Kindergemeenschap VO in Bilthoven. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *hugoduivesteijn@gmail.com*

EXAMEN VWO WISKUNDE B

Gerardo Soto y Koelemeijer

Vorig jaar sprak Gerardo Soto y Koelemeijer de hoop uit 'dat er met de denkactiviteiten meer van de leerlingen gevraagd wordt om na te denken, in plaats van standaardreceptjes te leren.' Of die hoop uitkomt is in deze recensie van het vwo wiskunde B-examen te lezen.

Inleiding

Op Twitter vroeg biologiedocent Frans Droog zijn volgers een schatting te maken van de N-termen voor de verschillende vakken. Gemiddeld dachten vakgenoten dat de N-term voor wiskunde B dit jaar 0,9 zou zijn. Gemiddeld hadden we gelijk. Zelf gokte ik 0,4: het niveau was naar mijn mening te laag. Kennelijk was ik te streng. Het leek in elk geval qua niveau niet op de pilot-examens.

Bewegend punt

De eerste vraag betreft bewegingsvergelijkingen. Het is een fijne binnenkomer waarbij eerst het punt A gevonden moet worden door de vergelijking $x(t) = 0$ op te lossen. Dit geeft $t^2 = 1$. Ik zou verwachten dat er twee oplossingen zijn, namelijk $t = -1$ en $t = 1$. Het is vreemd dat de oplossing $t = -1$ volgens het correctievoorschrift niet genoemd hoeft te worden. De formule voor de snelheid is standaard en prima voor een eerste opgave. De twee functies waarvan de afgeleiden moeten worden bepaald zijn ook standaard.

Bij vraag 2 moet worden bewezen dat punt P zich voor elke waarde van t op de kromme met vergelijking $(x + y)^2 = 4y$ bevindt. De eenvoudigste manier is door x en y in te vullen en uit te werken. Hoewel sommige leerlingen toch de mist ingaan, ging deze vraag over het algemeen vrij goed. Er werd gemiddeld 79% van de punten gescoord bij deze opdracht (vraag 1 en 2) in de steekproef van WOLF, het hoogste percentage van alle acht opdrachten. Het lijkt me dan ook een geslaagde opdracht als binnenkomer.

Lijn door de toppen

Vraag 3 is vrij standaard. Leerlingen moeten de top berekenen van de grafiek. Dit kan eenvoudig door de afgeleide (die al gegeven is!!) gelijk te stellen aan 0, en dan de vergelijking op te lossen. Het tweede deel, laten zien dat deze top dan ook op de lijn ligt, is wel erg triviaal. Bovendien kan men hiermee het antwoord van de top controleren. In *WiskundE-brief* 800 (4 februari 2018) stond de vraag of leerlingen nu wel of niet de primitieve zouden moeten kunnen berekenen van de functie $f(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$. Hoewel het CvTE toegeeft dat partieel integreren niet tot de examenstof hoort, schreven ze dat *'in deze situatie dient de kandidaat te bedenken dat een primitieve van de gegeven functie in ieder geval de factor* e^{ax} *dient te bevatten en al puzzelend tot een juiste, volledige primitieve moet komen.'* In dit examen heeft men toch voor de veilige weg gekozen. In vraag 4 is de primitieve gegeven en moet deze worden gedifferentieerd. Ook dit is een veelvoorkomende som, die goed geoefend kan worden. Sommige leerlingen herkennen $1/a$ niet als een constante. Anderen gaan toch partieel integreren en een enkeling doet dat wel heel snel, zoals in de complete uitwerking van een leerling in figuur 1. Wat als de leerling zou hebben gezegd dat dit resultaat verkregen is met partieel integreren? Zou dit dan voldoende zijn voor alle punten, of worden er meer tussenstappen verlangd?

figuur 1

Vraag 5 is een leuke vraag, enerzijds standaard, maar tegelijkertijd net even iets anders omdat de oppervlakte zich onder de x-as bevindt. Door de grafiek omhoog te schuiven of te spiegelen in de x-as kan dit worden verholpen, maar uiteraard hoeft dit niet. Net als in veel oude examens moet hier het resultaat van de vorige vraag worden gebruikt. Tot nu toe een vrij standaardexamen zonder echte denkvragen.

Zwaartepunt en rakende cirkels

Vraag 6, het berekenen van het zwaartepunt is niet meer dan het invullen van een formule. Het bepalen van de coördinaten van A en B zijn wel heel eenvoudig en al goed voor 3 punten!
Vraag 7, waarin naar de straal van een van de cirkels wordt gevraagd, is een opdracht waar we al vanaf klas 3 mee bezig zijn. Stel het gevraagde x en zorg dat je niet meer variabelen introduceert dan nodig. Vaak kan de stelling van Pythagoras worden gebruikt waarmee een kwadratische formule kan worden verkregen. Deze vraag voldoet precies aan deze beschrijving. Vraag 6 en 7 zijn wel heel eenvoudig en werden dan ook goed gemaakt: 73% van de totale punten werden behaald.

Maxima en minima

Vraag 8, het berekenen van de toppen van de functie $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$, is op zich een prima vraag. Er moet een aantal zaken worden gecombineerd (afgeleide, verdubbelingsformule, vergelijking oplossen), en de leerling moet begrijpen dat $\sin(x)$ tussen -1 en 1 ligt, hoewel dit volgens de centrale examenbespreking niet verplicht is. Dit vind ik echt een uitholling van het vak. Overigens kan deze vraag ook anders worden opgelost. Er geldt:

$$-6 \leq 6\sin(x) \leq 6$$
$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$$

en dus

$$-7 \leq 6\sin(x) - \cos(2x) \leq 7$$

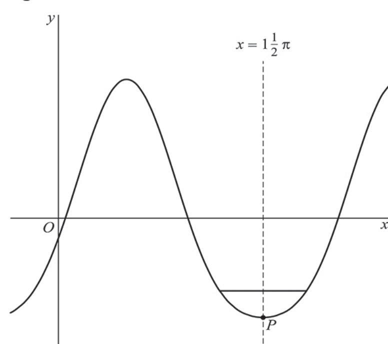
Je kunt je afvragen of de functie ergens de waarde 7 aanneemt. Dan moet gelden dat $6\sin(x) = 6$ dus $\sin(x) = 1$ en $\cos(2x) = -1$. Dit is het geval bij $x = 0{,}5\pi + 2k\pi$. De minima zitten dan bij $x = 1{,}5\pi + 2k\pi$.

Maxima en minima

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$.
Een van de toppen is het punt $P(1\frac{1}{2}\pi, -5)$.
De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door P.

Boven P wordt een horizontaal lijnstuk van lengte 2 geplaatst, waarvan de eindpunten op de grafiek van f liggen. Zie de figuur.

figuur



9 Bereken de afstand van P tot het horizontale lijnstuk. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

figuur 2

Vraag 9, zie figuur 2, is eigenlijk te makkelijk. Hier had ook gevraagd kunnen worden naar puntsymmetrie of lijnsymmetrie. De inleiding van vraag 9 kan de leerling bovendien helpen om vraag 8 deels te controleren. De waarde $x = 1{,}5\pi$ moet namelijk één van de toppen zijn. Ik vraag me af of het toegestaan is om de informatie uit de inleiding van vraag 9 te gebruiken om vraag 8 te beantwoorden:
De periode van $6\sin(x)$ is 2π, die van $\cos(2x)$ is π, dus de periode van $f(x)$ is weer 2π. Dit impliceert dat om de π radialen een top te vinden is. Eén top zit bij $1{,}5\pi$, dus het antwoord op vraag 8 zou zijn: $1{,}5\pi + k\pi$. Ook bij deze twee vragen werd goed gescoord: gemiddeld werd 70% van de totale punten behaald.

Sheffield Winter Garden

Vraag 10, zie figuur 3, is wat mij betreft geen vraag die thuishoort op een wiskunde B-examen. Het is een kwestie van gegevens invullen. Het zou gered kunnen worden als de booglengte gevraagd zou worden, maar ook dan is de vraag standaard en in te kloppen in de grafische rekenmachine (vreemd ook dat deze optie niet in het correctievoorschrift staat). Misschien dat als $f(x)$ zo gekozen zou zijn, dat de integraal exact berekend kan worden, de vraag wat spannender zou zijn.

Sheffield Winter Garden

Voor elke waarde van k met $k > 0$ wordt de functie f_k gegeven door:

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx})$$

De grafiek van f_k wordt een **kettinglijn** genoemd.

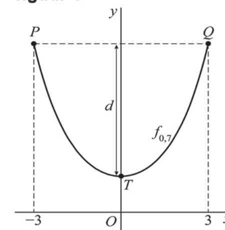
Op de grafiek van f_k worden twee punten P en Q met gelijke y-coördinaat gekozen. De lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q noemen we l. De top T van de kettinglijn ligt op de y-as. De afstand van T tot de horizontale lijn PQ noemen we d. Zie figuur 1.

Er geldt: $k = \dfrac{8d}{l^2 - 4d^2}$

In figuur 1 is voor $k = 0{,}7$, $x_P = -3$ en $x_Q = 3$ het bijbehorende deel van de kettinglijn getekend.

10 Bereken voor de situatie van figuur 1 de lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

figuur 1



figuur 3

De inleiding van vraag 11, het opstellen van het functievoorschrift van de boog, zou een stuk beter zijn indien de eerste, tweede, derde en vierde alinea geschrapt werden, zoals ik op Twitter voor de grap heb gedaan. Leerlingen raken gaandeweg door de hoeveelheid tekst de draad kwijt.

Natuurlijke logaritme van de wortel

Leerlingen die weten dat je de inverse krijgt door de x en de y te verwisselen en de uitdrukking om moet schrijven in de vorm y = ... , kunnen vraag 12 foutloos maken. Echt begrip van de inverse wordt niet gevraagd (vergelijk deze som met vraag 11 van het pilot-examen 2017 eerste tijdvak). Dit wordt nog eens versterkt doordat het antwoord wordt gegeven. Dit zou niet nodig zijn, ook niet voor het vervolg, waar een soortgelijke functie zou kunnen worden gegeven. Wat ik flauw vind aan de uitwerkingen is dat er in het correctievoorschrift expliciet staat dat uit $\sqrt{y} = e^x$ volgt dat $(\sqrt{y})^2 = (e^x)^2$, dus $f^{\text{ inv}} = e^{2x}$. Vergelijken we dit met wat we leerlingen bij wortelvergelijkingen leren, namelijk isoleren, en dan links en rechts kwadrateren, zonder daarbij bovenvermelde tussenstap te geven, dan vind ik het flauw dat het hier wel geëist wordt. Veel leerlingen slaan deze stap over. De vraag bij de uitwerking in figuur 4 is, of deze leerling nu precies weet hoe de gegeven uitdrukking aangetoond moet worden, of dat er naar het antwoord is toegewerkt zonder enig begrip.

figuur 4

Vraag 13, de minimale lengte van een lijnstuk berekenen, zou interessanter zijn indien de functies zodanig waren gekozen, dat dit exact berekend kon worden. Nu is het een kwestie van de formules invullen in de grafische rekenmachine en het minimum berekenen. Een enkele leerling gaat de fout in door de afgeleide zelf te willen berekenen en die gelijk te stellen aan 0. Ik vraag me werkelijk af wat hier nu getoetst wordt. Dat een leerling weet wat vermenigvuldiging met de x-as met een bepaalde factor impliceert? Dit kwam ook al bij vraag 11 aan de orde.

De functie h wordt gegeven door:

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\ln(x)}$$

De grafiek van h heeft rechts van de y-as één perforatie.

14 Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

figuur 5

Vraag 14, zie figuur 5, is vrij standaard en een stuk eenvoudiger dan de perforaties in de pilot-examens waarin een parameter p zat verwerkt. Leerlingen hebben geleerd dat bij een perforatie de teller en de noemer beide 0 zijn. Daarom is het des te vreemder dat in het correctievoorschrift men ook mag volstaan met $\ln(\sqrt{y}) = 0$ of $\ln(y) = 0$. Sommige leerlingen herschrijven de noemer $\ln(y)$ als $\ln(\sqrt{y}) + \ln(\sqrt{y})$, en delen dan boven en onder door $\ln(\sqrt{y})$, een aardig alternatief.

Vierkant onder grafiek

Vraag 15, waarin de grafiek van de functie $f(x) = 1/x$ is getekend, waaronder een vierkant is geplaatst, is een leuke vraag, maar helaas weer vrij standaard.

De vergelijking $\frac{1}{1+x} = x$ leidt tot de kettingbreuk [1; 1, 1, 1, ...] en dus is de uitkomst de gulden snede. Leerlingen blijken toch meer moeite hebben met deze vraag: gemiddeld werd slechts 57% van de punten hier behaald, het laagste percentage. Toen ik deze opgave nabesprak met twee leerlingen die gaan herkansen, konden ze niet geloven dat ze hier niet alle punten hadden gescoord.

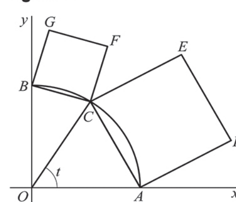
Twee vierkanten op een kwartcirkel

Vraag 16, zie figuur 6, vind ik op zich een aardige vraag, maar de toevoeging dat punt C coördinaten $(\cos(t), \sin(t))$ heeft is overbodig. Bovendien wordt hiermee een deel van vraag 17 verklapt. Er zijn meerdere leerlingen die schrijven dat $2 \cdot AC^2 = BC^2$ in plaats van $AC^2 = 2 \cdot BC^2$. Maar verder is het vrij standaard.

Twee vierkanten op een kwartcirkel

Gegeven zijn de punten $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$. Punt C bevindt zich op de kwartcirkel door A en B met middelpunt $O(0, 0)$. Op de lijnstukken AC en BC worden twee vierkanten $ADEC$ en $BCFG$ getekend. Zie figuur 1.

figuur 1



De grootte van hoek AOC (in radialen) noemen we t, met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
Punt C heeft dus coördinaten $(\cos(t), \sin(t))$.

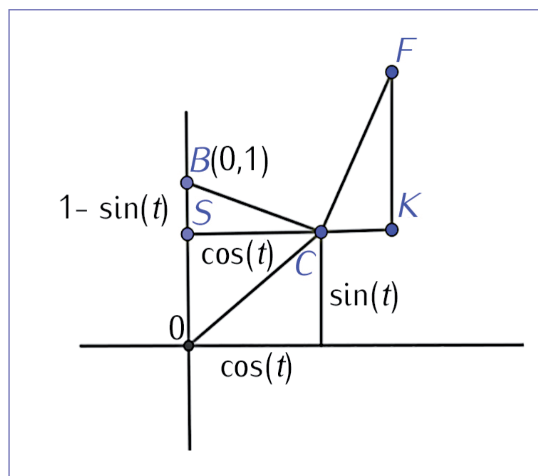
Er is een waarde van t waarvoor de oppervlakte van vierkant $ADEC$ twee keer zo groot is als de oppervlakte van vierkant $BCFG$.

16 Bereken deze waarde van t. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

figuur 6

Vraag 17 vind ik daarentegen een overbodige vraag. Iemand die vraag 16 heeft gemaakt zou de tekening in figuur 7 kunnen maken. Omdat $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BS}$ en $SC = KF$ is meteen duidelijk hoe de vector $\overrightarrow{OF}$ geschreven kan worden. Het antwoord had weggelaten kunnen worden,

veel leerlingen werken naar het antwoord toe en vaak lukt het ook, zonder dat je als docent weet of ze het daadwerkelijk begrepen hebben.



figuur 7

Of zoals een collega het formuleerde: 'Leuk voor de leerlingen, funest voor het wiskundeonderwijs.'

Opgave 9, 10, 11, 13, en 16 zijn vragen die niet exact berekend hoeven te worden en (deels) met behulp van de rekenmachine opgelost kunnen worden. Samen is dit goed voor 22 punten. Er zijn vier vragen waarin het antwoord al gegeven is. Dit zijn vier bewijsvragen, die samen goed zijn voor 15 punten. Dit zijn allemaal weggevertjes. Het enige wat de leerling moet beheersen zijn wat algemene vaardigheden. De enige andere bewijsvraag is opgave 3, waarin bewezen moet worden dat de top van de grafiek op lijn *l* ligt. Ook hier is het antwoord grotendeels gegeven.
Bijna alle opgaven zijn standaard en/of er is te veel weggegeven. Er hoeft in elk geval niet diep te worden nagedacht: met standaardroutines kan men een heel eind komen. Dat er zulke vragen in het examen zitten is prima, zeker in het begin, maar het aantal is nu te groot. Dit zien we onder andere terug in de totale gemiddelde procentuele score van de landelijke steekproef: 68%. Maar ook zien we dit in de sprong die sommige van mijn leerlingen maken na een eindexamentraining: er zijn er bij die voor hun CE 2,5 tot 4(!) punten hoger gescoord hebben dan op hun SE. Hoe leg je dat uit aan de schoolleiding? Zij zullen roepen dat de schoolexamens van een te hoog niveau zijn. Ik heb in het examen tevergeefs gezocht naar wiskundige denkactiviteiten. Ik zou graag weten of de WDA's voor het komende jaar nu wel of niet belangrijk zijn, graag nog vóórdat het nieuwe schooljaar met een nieuwe lichting eindexamenkandidaten begint.

> 'LEUK VOOR DE LEERLINGEN, FUNEST VOOR HET WISKUNDEONDERWIJS.'

Conclusie

Het positieve van dit examen is dat er minder contextvragen in zitten dan vorig jaar, alleen vraag 10 en 11, samen goed voor 9 punten.
Toch is mijn eindoordeel minder positief. Voor de leerlingen was het prettig om het eerste examen met een goed gevoel af te sluiten. Maar naar mijn mening was dit een veel te makkelijk examen, zeker ook vergeleken met de pilot-examens.

Over de auteur

Gerardo Soto y Koelemeijer is docent wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium Leiden, auteur van fictie en non-fictie en postdoc bij het ICLON Leiden. Onlangs verscheen van zijn hand *Wie is er bang voor wiskunde?, Verhalen en essays over wiskunde.*
E-mailadres: *sotoykoel@hotmail.com*

EXAMEN VWO WISKUNDE C

Marjan Botke

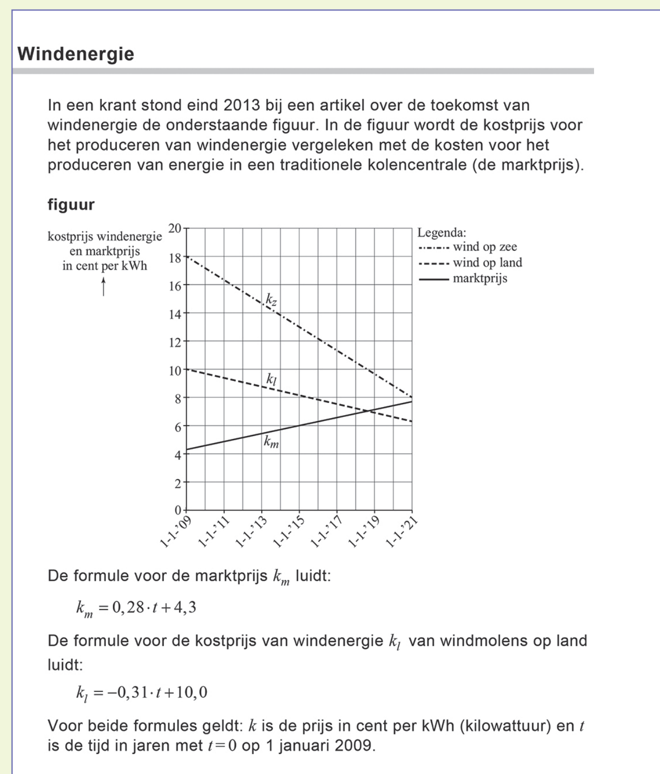
Voor het eerst een examen vwo wiskunde C nieuwe stijl. Marjan Botke bespreekt de opgaven en vergelijkt de N-termen met het bezem wiskunde C-examen en het wiskunde A-examen.

Inleiding

Dit schooljaar heb ik voor het eerst leerlingen in vwo 6 die het nieuwe examenprogramma wiskunde C volgen. En daar dus ook examen in doen. Ik heb er uiteindelijk twee naar het eindexamen mogen begeleiden.
Het is altijd spannend om het examen van het nieuwe programma te bekijken. Er zijn gelukkig pilot-examens beschikbaar waar de leerlingen mee kunnen oefenen. Maar het is toch wel afwachten in welke mate welke onderwerpen aan de orde komen.
Hieronder een opsomming van de opgaven in het examen.

Windenergie

Mooie opgave om mee te starten, zie figuur 1.



Windenergie

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie de onderstaande figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).

figuur

De formule voor de marktprijs k_m luidt:

$$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$$

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land luidt:

$$k_l = -0,31 \cdot t + 10,0$$

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

figuur 1

Opgave 1: Zelfde als opgave 1 vwo A, lineaire formule opstellen aan de hand van twee afgelezen punten.
Opgave 2: Zelfde als opgave 2 vwo A. Snijpunt van twee maal formule 1 en formule 2 bepalen. Leerlingen vinden het lastig om te bepalen welke formule ze met twee moeten vermenigvuldigen. Sommige leerlingen zetten beide formules in een tabel en kijken wanneer formule 2 twee maal zo groot is als formule 1.
Opgave 3: Een formule opstellen van een gemiddelde formule. Op zich niet een hele moeilijke opgave, maar de leerlingen zien vaak niet in hoe je een gemiddelde formule kunt opstellen. Ik vermoed dat ze vaak te moeilijk denken.
Opgave 4: De juiste gegevens bij elkaar zoeken om een vergelijking op te stellen en vervolgens oplossen.
Opgave 5: Procentrekenen. Sommige leerlingen rekenen precies verkeerd om met deze procentberekening. Er moet omgerekend worden hoeveel 100% is, met als gegeven hoeveel 5% is. Dit levert bijzondere antwoorden op die geen enkele betekenis meer hebben.

Francis Bacon

Lastige opgave over perspectieftekenen. De leerlingen vinden het lastig om goed te verwoorden wat er niet klopt. Het frontale perspectief leek lastiger dan de leerlingen gewend zijn in het boek.

Francis Bacon

Op de foto zie je een schilderij van Francis Bacon. Deze foto staat ook vergroot op de uitwerkbijlage. Een man bevindt zich voor een ruimte met donkere wanden. Het plafond en de vloer zijn in iets lichtere kleuren afgebeeld. Als je aanneemt dat deze ruimte balkvormig is, kun je zien dat de kunstenaar deze ruimte niet precies volgens de regels van het perspectief heeft getekend.

6 Leg met behulp van de foto op de uitwerkbijlage uit hoe je dit kunt zien.

foto



figuur 2

Opgave 6: Aantonen dat een perspectief niet juist is getekend, zie figuur 2. De leerlingen moeten laten zien dat de verdwijnpunten van twee sets lijnen niet dezelfde zijn. Het tekenen lukt wel, maar dan op een correcte manier opschrijven waarom het niet klopt, is lastiger.

Opgave 7: Het juiste perspectief tekenen. Er moet één verdwijnpunt worden bepaald. Daarna moet de tekening op de juiste wijze worden afgemaakt. Maar als het juiste verdwijnpunt is getekend, klopt de rest van de tekening natuurlijk ook niet meer. Dit maakt het nakijken van deze opgave lastig voor mij.
Opgave 8: Verdubbelen/halveren in perspectief. Veel leerlingen hebben wel de diagonalen in de gegeven rechthoek getekend. Maar het idee om met het midden *M* de volgende diagonalen te tekenen die precies een halve lengte verder eindigen, dat lukt vaak niet. Een enkele leerling heeft een verdwijnpunt getekend en daarmee de verdubbeling en halvering geconstrueerd. Deze opgave vind ik lastiger dan de opgaven die ik in mijn lessen heb kunnen behandelen.

Vermenigvuldigen op de handen

Veel leeswerk voor de leerlingen. Vingers omhoog/naar beneden worden gemakkelijk verward, dan is een groot deel van de opgave fout en werkt de methode ook niet meer. Dit trucje heb ik ooit op de NWD geleerd, met de bijbehorende uitwerking. Ik vind de opgave zelf erg leuk, maar wat complex voor de wiskunde C-leerlingen.
Opgave 9: De procedure nogmaals met andere waarden controleren. Als een leerling de methode verkeerdom toepast, klopt de methode niet, maar ze voeren hem wel goed uit.
Opgave 10: Uitleg van een formule, zonder getallenvoorbeeld. Het is voor de leerlingen moeilijk om goed uit te leggen wat ze bedoelen bij hun uitleg. Ze gebruiken toch snel een voorbeeld om het toe te lichten. Terwijl ze de 8 uit het voorbeeld gewoon kunnen vervangen door een x, dan heb je het antwoord al.
Opgave 11: Haakjes wegwerken en vereenvoudigen/herleiden. Dit lijkt een eenvoudige opgave. Toch worden er soms fouten gemaakt in het netjes wegwerken van de haakjes.

Grauwe ganzen

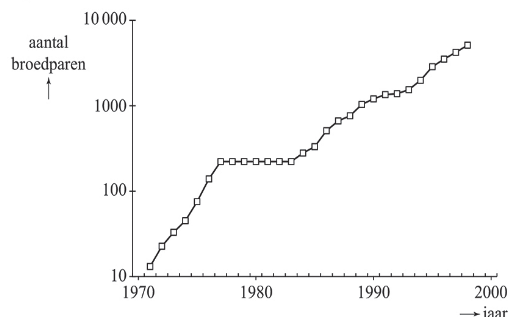
Heel veel leeswerk. Welke gegevens moet je wel en welke niet gebruiken?
Opgave 12: Werken met een logschaal. Jammer dat er geen schaalstreepjes op de y-as tussen de waarden zijn geplaatst. Dan was het beter af te lezen. Leuke opgave, zie figuur 3.

Opgave 13: Exponentiële formule opstellen. Nagaan of de formule past bij een gegeven uitkomst. Dit kan op twee manieren: bereken het aantal broedparen volgens de opgestelde formule in 2012, of bepaal of de groeifactor met de gegevens uit 2012 ongeveer dezelfde is als bij de andere gegevens. De groeifactor uitrekenen kunnen de meeste leerlingen wel (gelukkig), soms is er één die het toch als een lineaire groei gaat bepalen.
Opgave 14: Veel gegevens ordenen. Uitrekenen van exponentiële groei over een aantal jaren. Dit vind ik een

Grauwe ganzen

Grauwe ganzen eten gras en kunnen daardoor schade aan weilanden veroorzaken. Om die reden wordt er veel onderzoek gedaan naar de toename van het aantal grauwe ganzen in Nederland en de mogelijkheden om die toename te beperken.

figuur



In de figuur, die ook op de uitwerkbijlage staat, is het aantal broedparen van de grauwe gans in Nederland weergegeven voor de jaren 1971 tot en met 1998. Je ziet dat het aantal broedparen snel gegroeid is in deze periode. De verticale as in de figuur heeft een logaritmische schaalverdeling. Het derde punt van de grafiek, horend bij het jaar 1973, ligt tussen 10 en 100.

12 Bereken met behulp van de figuur het aantal broedparen in 1973.

figuur 3

ontzettend vervelende opgave. Natuurlijk moet hier met een exponentiële groei worden gerekend. Maar omdat er bij het bepalen van het aantal winterganzen in 2017/2018 zoveel stappen gezet moeten worden, is de kans op een kleine fout of vergissing erg groot. Jammer, hier kunnen de leerlingen slecht laten zien wat ze kunnen.
Opgave 15: Eerst exponentiële toename berekenen. Vergelijking met exponentiële afname oplossen. Door alle verwarring in de voorgaande opgave, is een aantal leerlingen ook hier het spoor bijster.

Het Cyrillische alfabet

Geen enkele leerling van mijzelf of bij mijn tweede correctie heeft zelf een Venn-diagram getekend bij deze opgave. Het lezen van de logische symbolen gaat goed. De juiste als/dan volgt hieruit, maar de vertaling is nog lastig.
Opgave 16: Gegevens ordenen door, bijvoorbeeld, een Venn-diagram op te stellen en in te vullen. Geen enkele leerling van wie ik het werk heb nagekeken, heeft zelf een Venn-diagram getekend. Veel leerlingen komen er wel uit door in woorden systematisch te beschrijven hoe het in elkaar zit.
Opgave 17: Bepalen wat een logische redenatie betekent en aflezen uit een Venn-diagram. Eenvoudige opgave, is ook goed gemaakt door bijna alle leerlingen.
Opgave 18: Omzetten van een logische bewering in een Nederlandse zin. Nagaan of de bewering klopt. Het omzetten doen de leerlingen goed. De meesten zien ook goed dat de bewering niet klopt. Een enkeling geeft een voorbeeld om dit te laten zien.

Toren van achtvlakken

Mooie rijen-en-reeksenopgave, leuke toepassing, zie figuur 4. Bij de laatste opgave is de berekening van de hoogte van de piramide vaak lastig. Het tekenen op schaal gaat wel vaak goed.

Toren van achtvlakken

Op de afbeelding zie je een kunstwerk van Elt de Boer: een toren van regelmatige achtvlakken op een voet. Het bovenste deel van de voet is de helft van een regelmatig achtvlak met daaronder een kubus waarvan de ribbe dezelfde lengte heeft als die van het halve achtvlak. Daarboven zie je negen hele achtvlakken die naar boven toe steeds kleiner worden.

afbeelding

voet

Een regelmatig achtvlak, zie de figuur, heeft 12 ribben die allemaal even lang zijn. De ribbe van de voet is 20 cm en die van het bovenste achtvlak is 4 cm.

figuur

ribbe

hoogte

De achtvlakken worden naar boven toe steeds kleiner. De kunstenaar kan ervoor kiezen de ribbe van de achtvlakken steeds met een vaste factor r te vermenigvuldigen. Afgerond op twee decimalen geldt dan:

$r = 0{,}84$

19 Bereken de waarde van r in drie decimalen nauwkeurig.

figuur 4

Opgave 19: Zelfde als opgave 18 vwo A. Het berekenen van een groeifactor/ vermenigvuldigingsfactor in een meetkundige rij. Als de leerling goed heeft geteld hoeveel hele en halve achtvlakken er zijn, dan gaat deze berekening prima.

Opgave 20: Zelfde als opgave 18 vwo A. Opstellen van een rekenkundige rij uitleggen. De berekening van 1,78 gaat vaak goed. Sommige leerlingen vergeten er duidelijk bij te zetten dat de term 20 afkomstig is van de eerste term.

Opgave 21: Zelfde als opgave 18 vwo A. Het verschil van twee rijen/formules in een gewone tabel of in een tabel met reeksen moet worden afgelezen. Dat doen de leerlingen goed.

Opgave 22: Aanzicht op schaal tekenen. Stelling van Pythagoras gebruiken. Bij deze laatste opgave is de berekening van de hoogte van de piramide vaak lastig, de leerlingen gebruiken Pythagoras niet of niet goed. Het tekenen op schaal gaat wel vaak goed.

Bespiegelingen

Hoe ziet een examen in het nieuwe programma eruit? Hoe worden de nieuwe examenonderwerpen behandeld? Wat vind ik van het examen? Ik vind het examen een goede afspiegeling van de onderwerpen in het examenprogramma. Zowel vorm en ruimte als logica komen goed aan bod. Vorm en ruimte is duidelijk te zien bij de opgave *Francis Bacon*. Logica zit in de opgave *Het Cyrillische alfabet*, zowel het Venn-diagram als logische symbolen en de vertaling hiervan komen hier aan bod. Algebraïsche vaardigheden, het opstellen en oplossen van vergelijkingen is vertegenwoordigd in het examen. Wel ben ik van mening dat de tekst van de examenopgaven soms erg complex is om te doorgronden. Bijvoorbeeld bij *Vermenigvuldigen op de handen* of *Grauwe ganzen*. En als de leerlingen slecht in staat zijn om de juiste gegevens uit de tekst te halen, dan is het erg moeilijk om te beoordelen of ze de wiskundige vaardigheden en kennis wel beheersen. Ze snappen de vraag niet goed, en kunnen hem dan dus ook niet goed beantwoorden. Hoeveel overlap heeft het examen met het examen wiskunde A? In dit examen wiskunde C waren in totaal vijf onderdelen precies hetzelfde als bij het examen wiskunde A. Dat lijkt me een prima overlap. Het examen heeft echter geen enkele overlap met het bezemexamen wiskunde C. Dat vind ik heel erg raar. Het examenprogramma wiskunde C
is inderdaad gewijzigd, maar niet zoveel dat er geen enkele overlap mogelijk was. Ik had zelf verwacht dat ongeveer 50% van het examen er hetzelfde uit had kunnen zien als het bezemexamen. Hoe hebben mijn leerlingen het examen gemaakt? En de leerlingen van andere scholen (tweede correctie). Ik heb zelf twee leerlingen wiskunde C. Bij mijn tweede correctie heb ik twee kleine groepen wiskunde C nagekeken met in totaal elf leerlingen en een groep van dertien leerlingen wiskunde C-bezem. In mijn eigen groep lagen de scores op 23 en 48 punten. Bij mijn tweede correctie lagen de scores tussen de 34 en 54 punten. Bij het bezemexamen wiskunde C lagen bij mijn tweede correctie de scores tussen de 27 en de 63 punten.

‘SOMS IS DE TEKST VAN DE EXAMENOPGAVEN ERG COMPLEX OM TE DOORGRONDEN.’

N-term

De N-term bij dit examen is 0,6. Precies dezelfde als bij het reguliere wiskunde A-examen. Naar mijn mening was dit examen minder makkelijk dan het reguliere wiskunde A-examen. En niet echt makkelijker dan het bezemwiskunde C-examen. Het wiskunde C-bezemexamen heeft een N-term van 1,2. Dit verschil vind ik veel te groot. Ik heb beide examens zelf gemaakt en gecorrigeerd voor de leerlingen. Naar mijn mening zou de N-term van beide wiskunde C-examens dichter bij elkaar moeten liggen en zou de N-term van het reguliere wiskunde C-examen wat hoger moeten zijn dan de N-term van het reguliere wiskunde A-examen.

Over de auteur

Marjan Botke is docent wiskunde aan het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam. Daarnaast is ze lid van de havo-vwo werkgroep van de NVvW, geeft ze de cursus ‘hoe kijk je een wiskunde-examen na’ in Rotterdam en is ze lid van de onderwijscommissie van PWN.

MEETKUNDIGE KIJK OP MODULOREKENEN

Rogier Bos

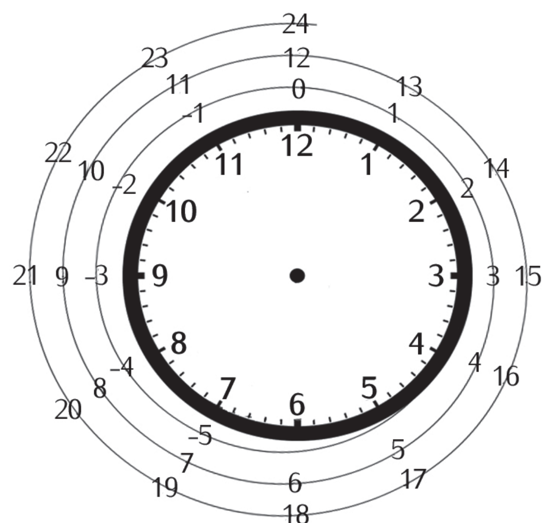
IMPRESSIE VAN DE WISKUNDE B-DAG-OPDRACHT 2017

Jaarlijks organiseert het Freudenthal Instituut de wiskunde B-dag. Op de deelnemende scholen gaan groepjes leerlingen een hele dag aan de slag met een uitdagende opdracht van een onderzoekend karakter. Het zijn opdrachten met een lage instap en een hoog plafond, die vaardigheden vereisen die ook in de context van wiskundige denkactiviteiten worden genoemd, zoals problemen aanpakken, modelleren en abstraheren. Een verslag van Rogier Bos.

Dit jaar deden zo'n 4000 leerlingen in 1000 groepjes op 100 scholen mee. Het waren vooral wiskunde B-leerlingen uit 5 vwo, maar er deden ook havisten en vierdeklassers mee. De uiteindelijke winnaar was een groepje van het Ulenhofcollege uit Doetinchem.

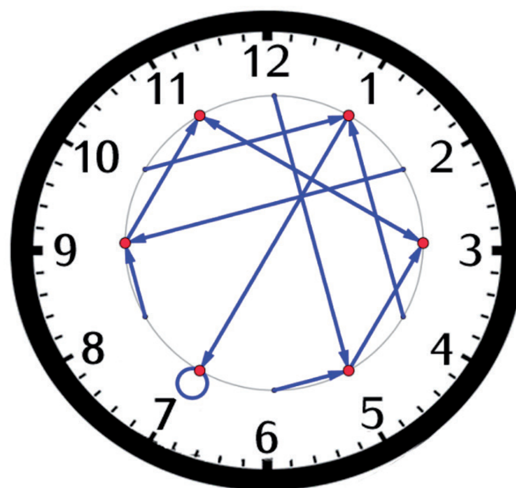
Modulorekenen en de klok

De opdracht ging over een meetkundige kijk op modulorekenen. Een toegankelijke instap tot dit onderwerp vormt het rekenen met de 12-urige klok. Natuurlijk is 3 uur min 5 uur niet -2 uur, maar 10 uur. Evenzo is 9 uur plus 18 uur niet 27 uur, maar 3 uur.
Een mooi beeld hierbij is de getallenlijn opgerold om de klok, zie figuur 1, zodat bijvoorbeeld -4, 8, 20 met elkaar geïdentificeerd worden. Bij rekenen modulo 12 beschouw je alle getallen die 12 van elkaar verschillen als equivalent. We schrijven bijvoorbeeld $-4 \equiv 8 \pmod{12}$.



figuur 1 De getallenlijn gewikkeld om de klok als model voor modulorekenen

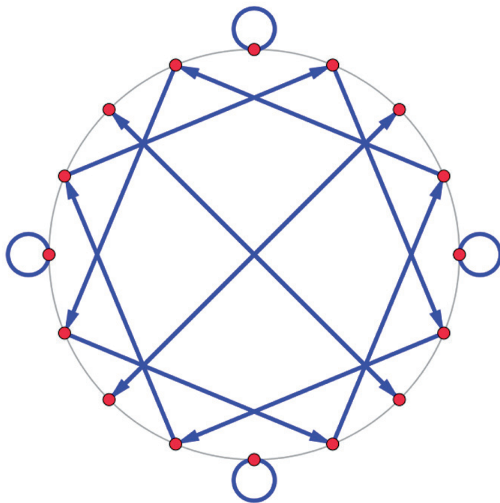
Modulorekenen wordt bij vwo wiskunde D weleens behandeld als cryptografie aan de orde komt. In de wiskunde B-opdracht 2017 proberen we leerlingen ervoor te interesseren op esthetische gronden. Laten we bijvoorbeeld eens naar de functie $f(x) = 2x + 5$ kijken.
Deze levert het plaatje van figuur 2 op.



figuur 2 Pijlen op de klok bij $f(x) = 2x + 5$

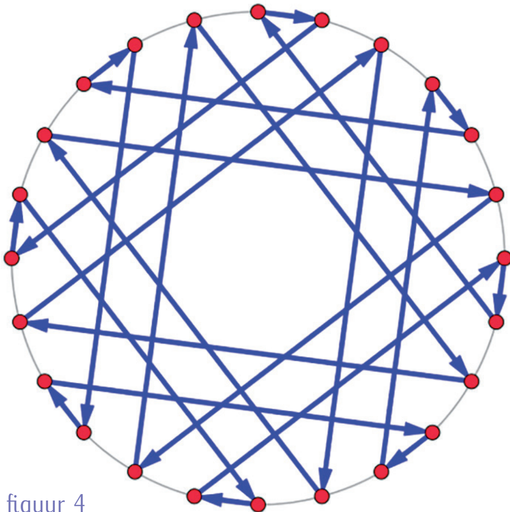
Misschien nog niet oogverblindend, maar heb geduld.
Een pijl wijst van x naar $f(x)$, bijvoorbeeld in figuur 2 zie je een pijl van 4 naar $2 \cdot 4 + 5 = 13 \equiv 1 \pmod{12}$. Een lusje staat voor een pijl van een getal naar zichzelf: $2 \cdot 7 + 5 = 19 \equiv 7 \pmod{12}$. In de opdracht noemen we deze plaatjes *pijlenklokken.*
Niemand houd je tegen om pijlenklokken (een soort grafieken voor modulorekenen) ook te maken modulo een ander getal. In het voorbeeld in figuur 3 rekenen we modulo 16 en is de functie f gedefinieerd door $f(x) = 5x$.

Je krijgt dan een mooi draaisymmetrisch plaatje met twee vierkanten en vier lusjes.

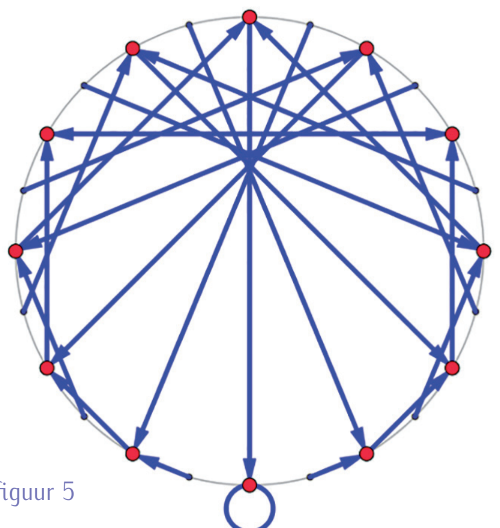


figuur 3 Een pijlenklok bij $f(x) = 5x$ modulo 16

Er is een GeoGebra-applicatie[1] waarmee je zelf deze pijlenklokken kunt maken voor verschillende functies modulo verschillende getallen *n*. Probeer maar eens de plaatjes van figuur 4 en 5 te maken.



figuur 4



figuur 5

De uitdaging voor de leerlingen is om de meetkundige patronen in de plaatjes in verband te brengen met de functies, met name van de vorm $f(x) = ax + b$, en *n*. Deze uitdaging valt op te delen in drie stappen, die in het algemeen goed van toepassing zijn bij onderzoekend met wiskunde bezig zijn:

(1) Observeer en stel vragen.
(2) Zoek en beschrijf regelmaat en structuur. Vorm hypothesen
(3) Bewijs de hypothesen.

Regelmaat en structuur

Leerlingen blijken met name sterk in de stap (2). In een van de opgaven wordt gevraagd wat het verband is tussen het aantal lusjes in een pijlenklok en de getallen *a* en *n*, als de functie van de vorm $f(x) = ax$ is. De aanpak van het groepje in figuur 6 is typisch.

a \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
4	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
5	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1
6	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
7	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3
8	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1
9	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	9	1	2	1
10	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3
11	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1

figuur 6 Leerlingen onderzochten het verband tussen het aantal lusjes en de getallen *a* en *n*

De leerlingen van dit groepje gingen met GeoGebra alle plaatjes langs en maakten bovenstaande tabel. Het knappe is dat ze hier de juiste formule voor het aantal lusjes uit induceerden: ggd(a – 1, n). Daarbij moet worden opgemerkt dat de ggd in een eerdere opgave ter sprake was gekomen, wat het groepje wellicht op het juiste spoor bracht. Over het algemeen komen leerlingen met zowel goede als nogal wilde uitspraken op basis van ontdekte patronen. Meestal zijn ze er zich van bewust dat het slechts hypotheses zijn, maar sommigen geven, als er expliciet om een bewijs gevraagd wordt, alleen voorbeelden. We zouden toch willen dat wiskunde B-leerlingen uit de vijfde en zesde klas het verschil weten tussen een vermoeden en een bewezen uitspraak, tussen inductie en deductie?

Inductie versus deductie

De bovenstaande aanpak bij de lusjes is slim, maar toont geen begrip van het probleem zelf. Een begripsvolle aanpak is een deductie die in één moeite tot de formule en het bewijs ervan leidt: de eerste stap is het inzicht

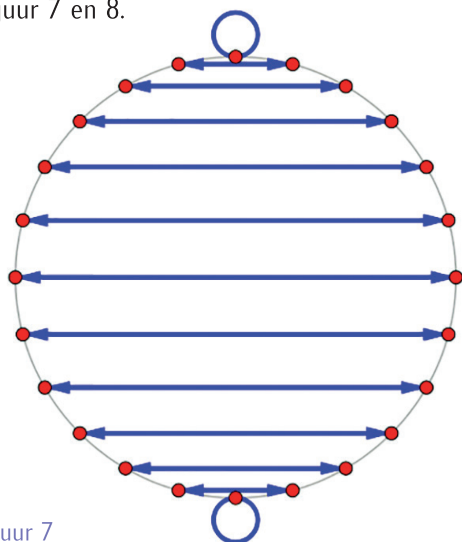
dat je een lusje bij x krijgt, als $f(x) \equiv x \pmod{n}$. Dan een beetje algebra: als $f(x) = ax$, dan is $ax \equiv x \pmod{n}$, oftewel $(a - 1)x \equiv 0 \pmod{n}$. Dus $(a - 1)x$ is een veelvoud van n. Tot slot een beetje getaltheorie: de kleinste waarde die hieraan voldoet is per definitie kgv(a – 1, n).

In totaal zijn er $\frac{(a-1)n}{\text{kgv}(a-1,n)} = \text{ggd}(a-1, n)$ oplossingen.

Een dergelijke aanpak blijkt een grote uitdaging voor leerlingen. Het eerste genoemde inzicht vormt direct een grote drempel. Het algebraïsch gedeelte tot aan '$(a - 1)x \equiv 0 \pmod{n}$' is vervolgens geen probleem. Dat is mooi: kennelijk zijn de leerlingen prima in staat tot deze *transfer* van schoolalgebra. De getaltheoretische redeneerstappen blijken vaak lastig, maar die komen ook minder aan bod in het reguliere schoolprogramma. De wiskunde B-opdracht biedt (ieder jaar) een mooie uitdaging om te oefenen met het inzetten van wiskundetechnieken uit het curriculum bij redeneren en modelleren in een nieuwe context.

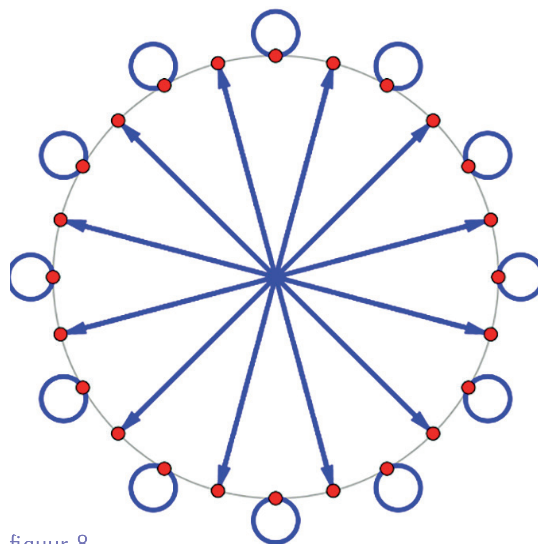
Observeren en vragen stellen

Wat voor vragen zou je, lezer van dit stuk, zelf stellen naar aanleiding van de pijlenklokplaatjes? Observeren en wiskundige vragen stellen is nog een hele kunst! We geven een paar voorbeelden van leerlingobservaties: ze ontdekten het veelvuldig voorkomen van plaatjes als in figuur 7 en 8.


figuur 7

Ze kwamen erachter dat deze patronen optreden als $a = n - 1$, respectievelijk $a = \frac{1}{2}n + 1$ (n even). We nodigen je van harte uit dit te verklaren! Ook viel het veel groepjes op dat de figuren vaak spiegelsymmetrisch zijn. Als de spiegelas door 0 ging, dan konden ze dat verklaren uit het feit dat de functie oneven was.
Maar er zijn nog veel meer vragen die je kunt stellen. Het ontwikkelteam van de wiskunde B-dag, bestaande uit ervaren wiskundedocenten en wiskundigen kwam tot een hele lijst: voor een vaste functie en n:

- Hoeveel groepjes evenwijdige pijlen zijn er? (*)
- Wanneer zijn er loodrechte pijlen?

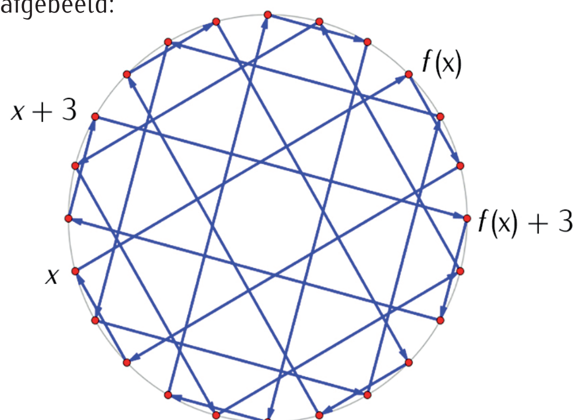

figuur 8

- Een punt waar een pijl uitkomt heet een *doelpunt*. Hoeveel doelpunten zijn er? (*)
- Hoeveel lusjes zijn er? (*)
- Hoeveel paren lijnen zijn er die op elkaar vallen, dus 'heen en weer'?
- Hoeveel lijnen gaan er precies door het midden van de cirkel?
- Is de pijlenklok spiegelsymmetrisch in een as? (*)
- Is de pijlenklok draaisymmetrisch? Van welke orde?
- Hoeveel (regelmatige) driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, et cetera heeft de pijlenklok? (*)

Vragen met (*) zaten deels in de opdracht verwerkt. Elk van deze vragen kan beantwoord worden met niet veel meer dan de technieken die we hierboven gebruikt hebben (ga je gang!).

Draaisymmetrie

Een laatste voorbeeld om te laten zien wat een juwelen er voor het oprapen liggen bij deze opdracht. De vraag wat de orde van de draaisymmetrie is bij $f(x) = ax + b$ heeft een prachtig antwoord. Een pijlenklok is draaisymmetrisch van orde k, als k de grootste deler van n is zodat voor iedere x geldt: $f(x + n/k) \equiv f(x) + n/k \pmod{n}$. Bijvoorbeeld, in figuur 9 is $n = 24$ en de orde van draaisymmetrie 8, dus $n/k = 3$. Een getal drie stappen verderop, $x + 3$, moet drie stappen verder dan $f(x)$ worden afgebeeld:



figuur 9 Draaisymmetrie van orde 8: $f(x + 3) \equiv f(x) + 3 \pmod{24}$

Voor een lineaire functie geeft dat:
$a(x + n/k) + b \equiv ax + b + n/k \pmod{n}$. Tot onze grote vreugde valt zowel x als b weg uit de vergelijking: $(a - 1) n/k \equiv 0 \pmod{n}$. Dus k moet ook een deler van $a - 1$ zijn (naast een zo groot mogelijke deler van n). Conclusie: de orde van de draaisymmetrie $k = \text{ggd}(a - 1, n)$. Terzijde: als $b = 0$ (zoals in figuur 3, 7 en 8), dan is het aantal lusjes dus gelijk aan de orde van de draaisymmetrie!

Onderzoekend wiskunde leren in de les

Natuurlijk wil je niet ieder jaar tot de wiskunde B-dag wachten om aandacht te besteden aan onderzoekend leren. Dat hoeft ook niet! Met eenvoudige technieken is het mogelijk je reguliere les een onderzoekend karakter te geven. Hiertoe is en wordt materiaal ontwikkeld in diverse projecten in Europees verband: zie Mascil[2], Primas[3] en Meria[4]. Ook biedt het Freudenthal Instituut komend jaar opnieuw een nascholingscursus aan over dit onderwerp.[5] De wiskunde B-dag van 2018 is op vrijdag 16 november. Meer informatie over deelname op de site van de wiskunde B-dag.[6] Inschrijven kan vanaf september via deze site.

Links

[1] *https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C*
[2] *http://www.mascil-project.eu/*
[3] *https://primas-project.eu/*
[4] *http://www.meria-project.eu/*
[5] Zie te zijner tijd voor informatie over de nascholingscursus: htt*ps://u-talent.nl/docenten/informatie-voor-docenten/*
[6] *https://www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-b-dag/meedoen-aan-de-wiskunde-b-dag*

Over de auteur

Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Hij is lid en coördinator van het Wiskunde B-dag ontwerpteam.

MEDEDELING

FINALE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE



Op vrijdag 14 september vindt op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor zijn 133 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen. Voor docenten die meegaan naar de finale is er tijdens de wedstrijd een onderhoudende lezing. Vanaf maandag 17 september vind je de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op www.wiskundeolympiade.nl. De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 9 november bekendgemaakt tijdens de prijsuitreiking.
Hieronder de resultaten van de Olympiade van dit jaar.

Internationale Wiskunde Olympiade 2018, Roemenië

Matthijs van der Poel (17 jaar) uit IJsselstein heeft een zilveren medaille behaald. Hij loste vier van de zes opgaven perfect op. Ook de vijf andere leerlingen uit het Nederlandse team vielen in de prijzen.
Op elk van de twee wedstrijddagen kregen de leerlingen drie opgaven van hoog wiskundig niveau voorgelegd, waar ze vier en een half uur aan konden werken. Voor elke opgave waren zeven punten te behalen. De resultaten zijn als volgt:

28 punten – zilver:	Matthijs van der Poel (17 jaar, IJsselstein, 5 vwo, Christelijk Gymnasium Utrecht)
22 punten – brons:	Nils van de Berg (18 jaar, Oosterhout (NB), 6 vwo, Sint-Oelbertgymnasium Oosterhout NB)
22 punten – brons:	Jippe Hoogeveen (15 jaar, Odijk, 4 vwo, Openbaar Lyceum Zeist)
20 punten – brons:	Jovan Gerbscheid (15 jaar, Amsterdam, 4 vwo, St. Ignatiusgymnasium Amsterdam)
18 punten – brons:	Thomas Chen (17 jaar, Den Haag, 6 vwo, Gymnasium Haganum Den Haag)
13 punten – eervolle vermelding:	Szabi Buzogany (18 jaar, Amersfoort, 5 vwo, Corderius College Amersfoort)

Aan maximaal de helft van de deelnemers wordt een medaille uitgereikt. Van de 594 deelnemers kregen de beste 48 een gouden medaille, de 98 besten daarna een zilveren en de volgende 143 deelnemers een bronzen medaille. In het landen-klassement eindigde Nederland samen met Mexico op de 36e plaats van de 107 landen. Het team van de Verenigde Staten behaalde de meeste punten, gevolgd door Rusland en China.

WISKUNDE EN NLT

Nelleke den Braber

Onderwijs meets Onderzoek wordt dit jaar voor de derde keer georganiseerd op 11 oktober 2018. Zoals de naam al zegt: dit is de conferentie waar docenten hun onderzoek presenteren. Nelleke den Braber presenteerde tijdens de editie van 2017 de bevindingen uit een uitgebreide voorstudie naar de rol van wiskunde binnen het vak natuur leven en technologie (nlt).



Inleiding

Tijdens mijn werk voor het landelijke coördinatiepunt nlt, dat tot taak had scholen te ondersteunen bij het geven van nlt, voerde ik veel gesprekken over nlt en specifiek over de relatie tussen wiskunde en nlt. Met leerlingen, maar ook met teams van docenten die nlt geven. Bij de start van nlt is beschreven dat het betrekken van wiskundedocenten in een dergelijk team prioriteit heeft, omdat wiskunde in veel bètadisciplines de rol van taal en/of gereedschap vervult. De geluiden uit de scholen gaven echter een ander beeld. Dit heeft geleid tot de start van een onderzoek naar 'het verhaal' van wiskunde en nlt.

Over nlt

Natuur, leven en technologie (nlt) is een schoolexamenvak dat vanaf schooljaar 2007-2008 als keuzevak wordt gegeven in de bovenbouw van de havo en het vwo. Nlt is een interdisciplinair bètavak waarbij de vaardigheden natuurwetenschappelijk onderzoek doen, modelleren en ontwerpen centraal staan. Het vak is bedoeld als aanvulling op het onderwijs in de profielvakken aardrijkskunde (fysische geografie), biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde. Het vak is niet bedoeld als vervanger van de monodisciplines. Belangrijke doelstellingen van nlt zijn het vergroten van de aantrekkelijkheid van bètaonderwijs en het versterken van de samenhang tussen de verschillende bètavakken.[1]
Het lesmateriaal bestaat uit modules over uiteenlopende onderwerpen, waarin voor een actueel vraagstuk inbreng vanuit verschillende disciplines nodig is. Daarom moet nlt gegeven worden onder verantwoordelijkheid van een team van docenten, het nlt-team genoemd, waarin bij voorkeur alle bovengenoemde disciplines vertegenwoordigd zijn. Elke docent met een eerstegraads bevoegdheid in één van die vakken is automatisch bevoegd om ook nlt te geven, maar nooit alleen. Dat er een nlt-team moet zijn is wettelijk vastgelegd.[2]

Na de eerste vijf jaar is op basis van de ervaringen met nlt op de scholen het examenprogramma herzien. De aard van nlt is gespecificeerd door vier essentiële kenmerken van nlt te beschrijven: de *interdisciplinariteit*, de *studie- en beroepscontext*, de *rol van technologie* en de *rol van wiskunde* (met als omschrijving dat nlt laat zien hoe wiskunde gebruikt wordt binnen natuurwetenschap en technologie).

Over het onderzoek

Door de rol van wiskunde apart te benoemen als een kenmerk van nlt ontstaat een bijzondere situatie. Nlt heeft tot doel om leerlingen te laten zien dat meerdere disciplines nodig zijn om een probleem op te lossen, zonder te suggereren dat de ene discipline beter is dan de andere. Tegelijkertijd lijkt de rol van wiskunde extra aandacht te eisen. Ook werd door de stuurgoep nlt[3] specifiek benoemd dat wiskundedocenten betrokken moeten worden bij nlt, wat niet voor de andere vakken het geval is. Om meer grip te krijgen op het verhaal van wiskunde en nlt is gekeken hoe wiskunde nu eigenlijk zichtbaar is binnen nlt. Dit gebeurt door data te verzamelen over het beoogde, uitgevoerde en bereikte curriculum, een driedeling die nuttig is om bij evaluaties van curriculum-innovaties te gebruiken.[4] Dit betekent dat er gekeken is naar allerlei officiële documenten, zoals visiestukken en examenprogramma's (beoogd), maar ook lesmateriaal en hoe dit in de les wordt gebruikt (beoogd en uitgevoerd) en de ervaringen van leerlingen en docenten (bereikt). Daarbij kwam de vraag naar voren op welke manier er een beroep wordt gedaan op de wiskundige bekwaamheid van de leerling. Gaat het hierbij bijvoorbeeld vooral om procedurele kennis, zoals het oplossen van een gegeven vergelijking of vooral om vaardigheden als logisch redeneren of modelleren of beide?[5] En komen alle wiskundige onderwerpen ook in het wiskundeprogramma voor?

38. Vraag: verdachte poeders

Een medicijn is verkrijgbaar als een poeder. Het werkzame aandeel X in een poeder is normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,0 mg en een standaardafwijking van 0,1 mg.

Het medicijn werkt pas goed als het werkzame aandeel per poeder tussen 4,7 mg en 5,3 mg ligt.

a. Bereken de kans dat een poeder goed werkt.

Er vinden regelmatig controles plaats om te kijken of de gemiddelde hoeveelheid werkzame stof inderdaad 5,0 mg is. Een steekproef van 50 poeders levert een gemiddelde op van 4,95 mg werkzame stof.

b. Is dit gemiddelde significant minder dan 5,0 mg? Neem een onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}05$

c. Hoeveel procent van de poeders werkt dan niet goed?

figuur 1 Statistiek in de havo-module *Maak het verschil*

Bevindingen

Hoewel als een kenmerk van nlt 'de rol van wiskunde' is genoemd, is het niet duidelijk hoe dat precies vorm moet krijgen binnen het onderwijs. Wel is beschreven dat het zowel om wiskunde kan gaan die binnen de wiskundevakken (A, B of D) aangeboden wordt als om wiskunde die niet tot het reguliere schoolvak wiskunde behoort. Ongeveer de helft van de leerlingen geeft aan dat ze binnen nlt wiskunde hebben gehad die ze nog niet kenden. Dit kan bijvoorbeeld gaan om wiskunde-onderwerpen die niet in het wiskundeprogramma zitten, zoals statistiek (voor wiskunde B) of grafen. Maar het kunnen ook onderwerpen zijn die wel tot het wiskunde-programma horen, zoals logaritmes, maar bij nlt eerder aan bod kwamen dan in de wiskundeles.

De ervaringen met wiskunde in het vak zijn heel wisselend voor zowel docenten als leerlingen. Als we bijvoorbeeld kijken naar de doelstellingen van het vak dan is een belangrijk doel de samenhang tussen de vakken versterken. Zo'n 73% van de bevraagde leerlingen geeft aan dat nlt laat zien hoe wiskunde kan worden toegepast. Hoewel een meerderheid van deze leerlingen dus wiskunde als onderdeel van nlt ziet, is er een aanzienlijk deel (22%), voor wie dat niet geldt. Sommigen vinden de wiskunde in modules niet vergelijkbaar met de wiskunde die ze in de wiskundeles krijgen, sommigen merken op dat ze geen 'wiskundemodule' hebben gehad of dat er alleen onderbouwwiskunde of rekenen voorkomt. Ook heeft een groot aantal leerlingen geen wiskundedocent gezien bij nlt. Dat laatste beeld wordt bevestigd door het feit dat slechts bij 50% van de nlt-teams een wiskundedocent betrokken is. Ter vergelijking, voor natuurkunde, scheikunde en biologie is dat respectievelijk 98%, 98% en 95%.

Wiskundedocenten die meedoen aan nlt geven verschillende redenen op voor deelname.

'WISKUNDEDOCENT OVER NLT: 'DE VRAAG "WAAR GEBRUIK JE WISKUNDE VOOR" WORDT EINDELIJK BEANTWOORD.'

Zo zegt een docent: 'De toepassingsmogelijkheden van wiskunde kunnen getoond worden. De vraag "waar gebruik je wiskunde voor" wordt eindelijk beantwoord.'

De eigen professionele ontwikkeling komt ook aan bod, zoals in "het verbreedt je blik". Maar er wordt ook opgemerkt dat wiskunde niet veel voorkomt en dat docenten van andere vakken ook prima die wiskunde kunnen uitleggen.

Omdat binnen nlt een eigen selectie van modules gekozen kan worden, kan de wiskundige inhoud sterk verschillen per school. Zo is het mogelijk om wel te voldoen aan het examenprogramma, maar alleen modules te hebben waar hooguit onderbouwwiskunde voor nodig is. Aan de andere kant zijn er ook scholen die wiskunde B verplichten voor het volgen van nlt of wiskunde D modules gebruiken.

Opdracht 0-5 (toepassingsopdracht): Bewegen op een bol

In figuur 2-19 beweegt een niet vervormende figuur over een bol. A gaat naar A' en B naar B'.

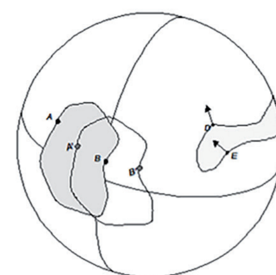
a. Beschrijf en schets in de tekening hoe de rotatiepool gevonden kan worden.

Er is in deze opgave een complicatie: je kunt nu niet met middelloodlijnen werken omdat je op een bol zit. Je moet in dit geval gebruik maken van de snijding van een middelloodvlak van bijvoorbeeld A en A' met de bol. De lijn volgt het oppervlak en loopt daarom gekromd. Hij is vergelijkbaar met de gekromde lijnen die zichtbaar zijn in figuur 2-19.

b. Leg in je eigen woorden uit dat de rotatiepool daarop moet liggen.

2.7.1 Grootcirkels

Deze bijzondere middelloodlijnen kunnen ook snijvlakken worden genoemd. Als je nogmaals kijkt naar de schets zie je dat deze snijvlakken altijd door het midden van de bol gaan. Simpelweg omdat dat midden even ver weg ligt van de twee punten op het boloppervlak. De snijlijn is een zogenaamde grootcirkel. Een grootcirkel loopt altijd van de ene rotatiepool door naar de andere. Hier wordt later nog verder op in gegaan.



Figuur 2-19: Beweging van een niet vervormde figuur

figuur 2 Meetkunde in de vwo-module *De bewegende aarde*

Discussie

Binnen de wiskundecommunity lijkt nlt niet echt een rol te spelen. Hier zijn verschillende redenen voor te noemen, die in een later stadium van het onderzoek aan bod komen.

Het feit blijft echter dat wiskunde binnen nlt wel een rol speelt en dat ervaringen die leerlingen binnen nlt met wiskunde opdoen, bijdragen aan het beeld dat ze van wiskunde ontwikkelen. Ook kan het voorkomen dat een leerling met bepaalde wiskunde in aanraking komt voordat dit in de wiskundeles gebeurt. Dit vraagt op zijn minst om afstemming. De doelstelling van nlt is dat leerlingen ervaren hoe wiskunde gebruikt wordt binnen natuurwetenschap en technologie, maar hoe dit precies vorm moet krijgen, is niet helemaal duidelijk. Het vervolgonderzoek richt zich hier dan ook op, waarbij leerlingen zich bijvoorbeeld

uitspreken over het ervaren belang van wiskunde. Daarnaast zijn ook wiskundedocenten een focus voor vervolgonderzoek. Als wiskundedocent wordt er verwacht dat je antwoord kunt geven op vragen zoals 'wat wiskunde is', 'hoe je wiskunde kunt onderwijzen' en 'hoe leerlingen wiskunde moeten leren'. Maar dit gaat eigenlijk altijd over wat er binnen de wiskundeles zelf gebeurt. Binnen nlt is de setting heel anders, er zijn daar ook andere (didactische) werkwijzen en doelstellingen. Van nlt docenten wordt verwacht dat ze een antwoord kunnen geven op 'waarom is het belangrijk dat wiskunde onderdeel is van nlt', 'hoe moet wiskunde gebruikt wordt binnen nlt' en 'hoe kan de verbinding gelegd worden tussen nlt en het wiskundecurriculum en wiskundedidactiek'.
Een wiskundedocent zou hier een belangrijke rol in kunnen spelen en tevens een voorbeeld kunnen geven van de bijdrage die wiskundigen leveren aan interdisciplinair werken.

Noten

[1] Stuurgroep NLT (2007). *Contouren van een nieuw bètavak; visie op een interdisciplinair vak: natuur, leven en technologie*. Enschede: SLO.

[2] Meer over nlt-teams is te lezen in de katernen nlt-didactiek die te vinden zijn op *www.betavak-nlt.nl*

[3] Krüger, J. & Eijkelhof, H. (2010). *Advies beproefd examenprogramma nlt: eindrapportage Stuurgroep nlt*. Enschede: Stuurgroep NLT

[4] Meer over deze driedeling is te lezen in *Leerplan in ontwikkeling* van SLO (2009)

[5] De componenten van wiskundige bekwaamheid van Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn*. Washington, DC: National Academy Press.

Over de auteur

Nelleke den Braber is werkzaam als lerarenopleider wiskunde bij de 2e en 1e-graads opleiding van NHL–Stenden Hogeschool. Ondersteund door het lectoraat Wendbaar vakmanschap van de hogeschool doet ze onderzoek als buitenpromovendus bij de Universiteit Utrecht onder begeleiding van Wilmad Kuiper, Jenneke Krüger en Marco Mazereeuw.
E-mailadres: *braber@nhl.nl*

SCHERP, RECHT, STOMP...

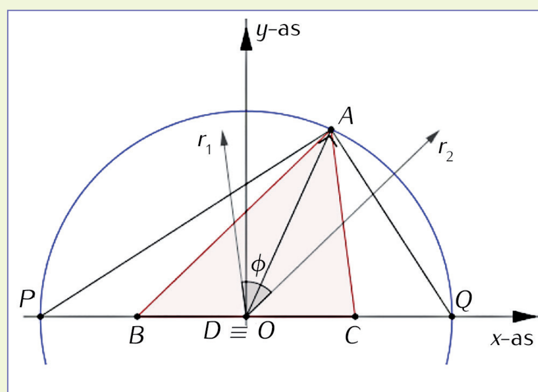
Dick Klingens

De voorloper van *Euclides* uit 1924 inspireerde Dick Klingens tot het componeren van een WDA. Dick kwam een stelling over zwaartelijnen tegen en bewijst die zoals we dat nu kunnen doen.

Op bladzijde 101 van wat nu te boek staat als de derde *Euclides*[1] ooit, lees ik – bij toeval, want ik was op zoek naar iets anders – in het artikel 'Loodrechte stand van lijn en vlak' van de hand van ir. D.J. Kruijtbosch de volgende zinsnede:

behandeld, luidend: „Naarmate in △ ABC de zwaartelijn uit A grooter, gelijk of kleiner is dan de helft van BC, is de hoek A scherp, recht of stomp". Om deze stellingen te bewijzen zijn

Het is een uitspraak die ik zeker onderschrijf (hoewel, ik zou het woordje 'naarmate' niet gebruiken). Binnen het huidige meetkundeonderwijs, in onder- en bovenbouw van het voortgezet onderwijs, zal de vraag een bewijs te geven van die uitspraak, niet meer gesteld worden, denk ik.
In het kader van Wiskundige Denk Activiteiten (WDA's) geef ik hier toch de volgende opdracht:
Geef een synthetisch bewijs van bovenstaande uitspraak.
Maar eerst laat ik een analytisch bewijs volgen, want dat ligt, in ieder geval in de bovenbouw, meer voor de hand.
Ik kies een xOy-assenstelsel waarvan de x-as langs de zijde BC van de driehoek valt, waarbij $O \equiv D$ (D is het midden van de zijde BC). Dan kies ik, zie figuur 1, $A = (p, q)$ in het eerste kwadrant – dat doet de algemene geldigheid van hetgeen volgt geen geweld aan – en $B = (-b, 0)$, met $b > 0$, zodat $C = (b, 0)$.



figuur 1

(1a) Ik veronderstel allereerst dat $OA > ½BC = OC$. Met $OA = \sqrt{(p^2 + q^2)} = r$ ligt het voor de hand ook de cirkel met middelpunt O en straal r in de beschouwing te betrekken.
Omdat $b = OC < OA = r$ is, snijdt deze cirkel de x-as in de punten $P = (-r, 0)$ en $Q = (r, 0)$, waarbij $\angle PAQ = 90°$ (*Thales-cirkel*) en waarbij de punten B en C op het lijnstuk PQ liggen (*beide* binnen de cirkel). Dus: hoek BAC is een scherpe hoek.

(2a) Als $OA = OC$ is, dan vallen de punten P, Q samen met de punten B, C, zodat in dit geval hoek $BAC = \angle PAQ = 90°$; zie onderdeel (1a).

(3a) En als $OA < OC$ is, dan rest dat hoek BAC stomp is (*quartum non datur*).

Maar, ga ik bij het bewijs in (1a) eigenlijk niet te veel af op wat ik *zie* in figuur 1? Moet ik niet *met een berekening* aantonen dat hoek BAC een scherpe hoek is? Welnu.

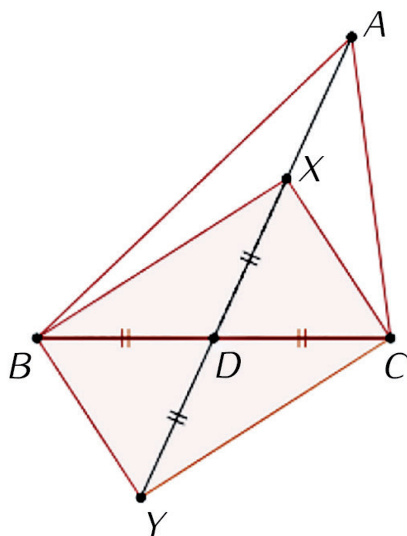
Voor de richtingsvectoren r_1 en r_2 van AC en AB vind ik:

$$r_1 = r_{AC} = \begin{pmatrix} p-b \\ q \end{pmatrix}, \quad r_2 = r_{AB} = \begin{pmatrix} p+b \\ q \end{pmatrix}.$$

Met $\varphi = \angle(r_1, r_2)$ is dan:

$$\cos\phi = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1| \cdot |r_2|} = \frac{p^2 - b^2 + q^2}{|r_1| \cdot |r_2|} = \frac{r^2 - b^2}{|r_1| \cdot |r_2|}.$$

Omdat in onderdeel (1a) $r > b$ is, is $\cos\varphi > 0$.
En daarmee is φ een scherpe hoek, en hoek A dus ook.
Ik vind dat ik bij een synthetisch bewijs *geen* gebruik mag maken van een cirkel (maar waarom eigenlijk?).
Zie daarom nu figuur 2.



figuur 2

(1s) Als $AD > BD$ is, is er een punt X op het lijnstuk DA met $DX = DB = DC$. En dan is in driehoek BXC de zwaartelijn uit X *gelijk* aan de helft van BC.
Met het punt Y op het verlengde van XD zó dat $XD = DY$ is, is vierhoek $XBYC$ een rechthoek; immers, de diagonalen XY en BC hebben beide het punt D als midden en hebben dezelfde lengte. Maar dan is $\angle BXC = 90°$.
De som van de hoeken in de (niet-convexe) vierhoek $ABXC$ is gelijk aan 360°. Dan is in die vierhoek: $\angle A + \angle B + \angle C = 360° – 270° = 90°$. Hoek A, ook die van driehoek ABC, is dan zeker een scherpe hoek.

(2s) Als $AD = BD$ is, dan valt het in onderdeel (1s) geïntroduceerde punt X samen met het punt A. In dit geval is $\angle BXC = 90° = \angle BAC$.

(3s) En is $AD < BD$, dan kan het niet anders dan dat hoek A stomp is.

Aan de opdracht voldaan hebbend, stel ik toch nog wat vragen in het kader van deze WDA.
Is er bij (1s) echt geen gebruik gemaakt van een cirkel?
Is er in het bovenstaande gebruik gemaakt van het feit dat in de figuren 1 en 2 hoek A als een scherpe hoek is weergegeven?
Zo ja, waar is dat het geval? En verloopt het bewijs anders als hoek A als stomp zou zijn weergegeven?

Noot

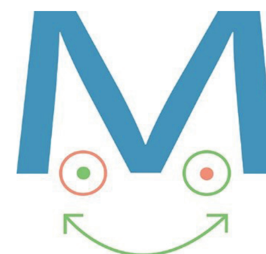
[1] Kruytbosch, D.J. (1924). Loodrechte stand van lijn en vlak. *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gewijd aan Onderwijsbelangen. 1*(1), pp. 101-108. Groningen: P. Noordhoff.

Zie het digitale archief van *Euclides: https://archief.vakbladeuclides.nl/jaargang_001.html.*

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen vanaf 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*

MEDEDELING



ONDERWIJS MEETS ONDERZOEK

Op donderdag 11 oktober organiseren de NVvW, het Freudenthal Instituut en SLO de derde editie van de conferentie Onderwijs meets Onderzoek. Het doel van deze conferentie is dat wiskundeleraren en onderzoekers van wiskundeonderwijs met elkaar in gesprek gaan over de vraag wat onderwijspraktijk en onderwijsonderzoek voor elkaar kunnen betekenen. Kosten: € 75,–
Donderdag 11 oktober 2019, 15:00 – 19:00, inloop 14:30, Hogeschool Utrecht, exacte locatie wordt nog bekend gemaakt.

VIERKANTEN EN RECHTHOEKEN

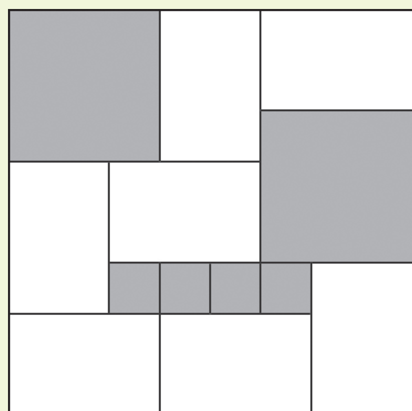
OLYMPIADEPUZZEL 94-1



Birgit van Dalen
Quintijn Puite

In deze jaargang vind je in nummers 1, 3, 5 en 7 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We moedigen je daarom aan om de puzzel ook met je klas te proberen: met enig doorzettingsvermogen zal een groepje leerlingen deze puzzel misschien ook wel kunnen oplossen.

Een vierkant met zijde 12 is opgedeeld in zes kleinere vierkanten (de grijze gebieden) en zeven identieke rechthoeken, zie de figuur hieronder. Wat is de gezamenlijke oppervlakte van de grijze vierkanten?



Stuur je oplossingen uiterlijk 4 oktober naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel 93-6

Voor de puzzel Getallenrij hebben we veertien inzendingen ontvangen. Er zijn verschillende aanpakken gevolgd. De meeste inzenders hebben eerst een paar extra waarden van de rij uitgerekend (met behulp van een stelsel vergelijkingen) en daarna herkend dat dit een kwadratische rij was; in feite de kwadraten plus 1. Bij deze aanpak is het wel nodig om te controleren dat de gegokte formule daadwerkelijk aan de gegeven recursieve vergelijking voldoet en niet alleen met een paar termen van de rij overeenkomt. Anders weet je strikt genomen niet zeker dat de rij zich verderop niet heel anders gaat gedragen. Ook werd gevraagd naar alle mogelijke waarden en moet je dus controleren of er niet nog meer mogelijkheden zijn. Als er drie opeenvolgende termen vastliggen, dan volgt uit de recursie dat er maar één mogelijke rij is. Maar in de opgave waren nog geen drie opeenvolgende termen gegeven, dus het is wel nodig om extra termen uit te rekenen. Op deze details na waren alle inzendingen goed! De winnaar van de cadeaubon is Harm Bakker. De complete uitwerking van de puzzel en de lijst met alle inzenders van een juiste oplossing zijn te vinden op de website.

 *vakbladeuclides.nl/941olympiadepuzzel*

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2018

TWEEDE UITNODIGING

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 3 november 2018.
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.15 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

Thema van de studiedag: Natuur(lijk(e)) wiskunde

'Het boek van de natuur is geschreven in de taal van de wiskunde', aldus sprak Galilei. Zonnebloemen en konijnen worden door wiskundigen al snel in verband gebracht met Fibonacci. Laat wat vossen los en je kunt experimenteren met een prooi-roofdiermodel. Tenzij het prooidier, zoals sommige cicaden, zich alleen tijdens vreemde priemcycli laten zien. De natuur zit vol wiskundige structuren en patronen. Wiskunde helpt om die te doorzien, te verklaren en te benutten. Hoeveel partners moet je laten gaan om je aan de beste keus te verbinden? De haakjes in het thema van deze studiedag staan er niet voor niets. Wat is een natuurlijke manier om wiskunde te leren? Is de geschiedenis van de wiskunde een leidraad voor het leerproces van leerlingen, is het de wiskundige structuur zelf, of moeten we zoeken naar leerwegen die voor de leerling betekenisvol zijn? Wellicht is het antwoord afhankelijk van leeftijd, niveau en belangstelling van de leerling. Als je ervaring hebt met een didactische benadering waarmee je leerlingen op een natuurlijke manier een wiskundig begrip of vaardigheid leren, dan hopen we dat je je aanmeldt om een werkgroep te leiden.
Tot slot heeft wiskunde natuurlijk een plek in het voortgezet onderwijs. Natuurlijk? Sinds wanneer eigenlijk? We geven wiskunde omdat dit vak nodig is in veel vervolgopleidingen. Maar ook de voorbereiding op burgerschap en de beroepspraktijk worden vaak genoemd. Hoe zit dat eigenlijk? Die balans is vast niet hetzelfde voor alle leerlingen en voor alle niveaus.
Tijdens de studiedag staan natuur en wiskunde, de natuurlijke weg naar wiskunde en het hoe en waarom van 'natuurlijk wiskunde' centraal. Laat je nu alvast inspireren voor het verzorgen van een werkgroep. Verantwoordelijk voor de samenstelling van deze dag zijn Lidy Wesker-Elzinga (*l.wesker@nvvw.nl*) en Michiel Doorman (*m.doorman@nvvw.nl*). Ideeën voor bijdragen kun je aan hen doorgeven.

Agenda jaarvergadering

10.00-11.00 uur

1. Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Wereld Wiskundefonds 25 jaar
4. Notulen van de jaarvergadering 2017.
5. Jaarverslagen 2017/2018 van de NVvW en van *Euclides*
6. Jaarrekening en balans 2017/2018, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
7. Bestuursverkiezing
   Aftredend zijn: Gert de Kleuver, Lidy Wesker, Gert Treurniet, Tanja Groenendaal, Michiel Doorman en Wim Caspers.
   Zij stellen zich allen herkiesbaar voor een nieuwe termijn.
   Het bestuur nodigt leden uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).
   Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
8. Rondvraag
9. Sluiting van de jaarvergadering.

Programma studiedag (Tijdstippen onder voorbehoud)

11.00 – 11.15 Inleiding op de studiedag
11.15 – 12.00 Plenaire lezing

12.00 – 12.15 Pauze
12.15 – 13.05 Workshopronde 1A/lunch en markt
13.05 – 13.15 Wisseltijd
13.15 – 14.05 Workshopronde 1B/lunch en markt
14.05 – 14.15 Wisseltijd
14.15 – 15.05 Workshopronde 2
15.05 – 15.30 Wisseltijd
15.30 – 16.15 Plenaire voordracht en afsluiting
Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf 1B. De tijdsindeling van de studiedag biedt deelnemers ruim gelegenheid voor lunch en marktbezoek.

LIO-dag
Al enige jaren is de LIO-dag een succesvolle traditie geworden: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de LIO-ers. De LIO's krijgen in september via hun opleider meer informatie.

Nieuwe leden
De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit voor de jaarvergadering/studiedag. In de loop van oktober ontvangen zij hiervoor een persoonlijke uitnodiging via de mail.

Kosten
De studiedag is gratis voor leden. Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 87,50. Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2019 inclusief alle faciliteiten, waaronder zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen en gratis gebruik van helpdesk t.b.v advisering in arbeidszaken. Ook studenten zijn welkom, zij betalen € 40,00 (mits ze niet ouder zijn dan 27 jaar). Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00.
Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!

	Zonder lunch	Met lunch
Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 87,50	€ 97,50
Student (niet ouder dan 27 jaar en niet lid)	€ 40,00	€ 50,00

Aanmelding
Aanmelden kan vanaf half september tot **27 oktober 2018.** Voor de organisatie is het van belang dat je je op tijd aanmeldt. Ook dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de site van de vereniging. Daarop staat het volledige programma, inclusief de workshops waar je een keuze uit kunt maken. Het aanmeldingsformulier leid je door de vragen en geeft ook aan hoe je kunt betalen.
De plaatsing in werkgroepen gaat op volgorde van binnenkomst en vol = vol. De indeling wordt een paar dagen voor de studiedag op de site gepubliceerd; aan het begin van de studiedag ontvang je een badge met je plaatsingsgegevens.

Markt
Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar je je hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes. Er is zowel een commercieel als een niet-commercieel deel. Verantwoordelijk voor deze markt is Theo Wesker.

Certificaat
Wil je een certificaat ontvangen, vermeld dan bij je aanmelding ook je voorletters en geboortedatum. Het certificaat word je na afloop van de studiedag digitaal toegestuurd.

Informatie
Verantwoordelijk voor de organisatie en contactpersoon van deze dag is Heleen van der Ree (e-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*).

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallengange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2018

vr 14/9 — **Eindhoven**
Finale wiskunde olympiade 2018

ma 17/9 — **Nijkerk**
Optimaal voorbereid naar het eindexamen
Organisatie: NVvW en SLO

do 11/10 — **Utrecht**
Onderwijs meets onderzoek
Organisatie: NVvW, Freudenthalinstituut, SLO

za 13/10 — **Utrecht**
Symposium Reken je rijk
Organisatie: Werkgroep geschiedenis NVvW

za 3/11 — **Veenendaal**
Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

vr 16/11 — **Landelijk**
Wiskunde B-dag
Organisatie: Freudenthalinstituut

2019

za 21/1 t/m 31/1 — **Landelijk**
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

vr 1/2 en 2/2 — **Noordwijkerhout**
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 94

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	30 oktober 2018	27 augustus 2018
3	18 december 2018	15 oktober 2018
4	29 januari 2019	19 november 2018
5	19 maart 2019	7 januari 2019
6	7 mei 2019	4 maart 2019
7	25 juni 2019	29 april 2019